Notes de cours

Suites et séries de fonctions

Cyrille CHENAVIER

Université de Limoges

L2 Mathématiques, semestre 4

Chapitre 1 :

Motivations

Ce cours porte sur la convergence des suites de fonctions et les résultats de passage à la limite qui en découlent. La façon la plus naturelle de définir qu'une suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$, définies un même domaine $D \subseteq \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, converge vers une fonction limite f est de spécifier que les suites numériques $\left(f_n(x)\right)_n$ obtenues en évaluant les f_n en un point $x \in D$ tendent vers $f(x) \in \mathbb{K}$. Le type de résultats de passage à la limite qui nous intéresse est par exemple : si les f_n sont continues, alors f est-elle continue ? Si les f_n sont dérivables, alors f est-elle dérivable et dans ce cas, est-ce que f' est la fonction limite de la suite des dérivées $\left(f_n'\right)_n$? Comme on le verra, si on ne demande pas d'hypothèses plus fortes sur la convergence de $\left(f_n\right)_n$, alors les réponses à ces questions sont en général négatives.

Le problème de renforcer les hypothèses de convergence d'une suite de fonctions amène à l'une des différences majeures entre la convergence des suites numériques et la convergences des suites de fonctions. Pour les suites numériques, il existe une seule forme de convergence : une suite numérique tend vers un nombre si pour tout voisinage de ce nombre, il existe un rang à partir duquel tous les éléments de la suite numérique sont dans ce voisinage. Pour les suites de fonctions, il existe de nombreuses formes de convergence, mais on en présente seulement deux ici. La première est la convergence simple, qui n'est rien d'autre que la convergence point par point présentée dans le paragraphe précédent. Bien que comme son nom l'indique cette forme de convergence est la plus simple d'un point de vue conceptuel, on a vu qu'elle n'admet pas de bonnes propriétés par passage à la limite. La deuxième forme de convergence que l'on présente est la convergence uniforme, plus abstraite que la convergence simple, mais plus forte d'un point de vue théorique. On verra en effet qu'elle entraîne la convergence simple, si bien qu'elle définit également une fonction limite, de plus, elle permet d'obtenir de nombreux résultats de passage à la limite.

Après avoir étudié la convergence des suites de fonctions en général on s'intéressera à des suites de fonctions particulières, appelées séries de fonctions. Celles-ci sont construites sous forme de sommes itérées de fonctions : le premier terme de la suite est une fonction, le deuxième est obtenu en sommant une deuxième fonction avec la première, le troisième en sommant une troisième fonction avec la somme des deux premières, et ainsi de suite. Étant des suites de fonctions particulières, les séries de fonctions peuvent converger simplement ou uniformément. Cependant, de nouvelles formes de convergence apparaissent pour les séries de fonctions : la convergence uniforme absolue et la convergence normale. On verra que la convergence normale entraîne la convergence uniforme absolue, qui elle-même entraîne la convergence uniforme. En particulier, si une série de fonctions converge normalement ou uniformément absolument, les résultats de passage à la limite vrais pour la convergence uniforme sont *a fortiori* vrais pour ces nouvelles formes de convergence. Les considérations de ce paragraphe et du précédent sont l'objet du chapitre 2.

L'introduction de la convergence normale est motivée par l'étude des séries entières qui sont des séries de fonctions particulières. Chaque nouveau terme ajouté à la somme en cours de construction est une fonction monomiale, *i.e.*, de la forme une constante multipliée par une fonction puissance entière. Les séries entières admettent un domaine de convergence sur lequel elles convergent normalement, donc uniformément, si bien qu'elles vérifient tous les théorèmes de passage à la limite découlant de la convergence uniforme. On verra en particulier que la limite d'une série entière est continue, et que pour dériver ou intégrer cette limite il suffit de dériver ou intégrer chaque terme de la série entière puis de passer à la limite. On en déduira que la fonction limite d'une série entière est infiniment dérivable sur son domaine de définition. Les considérations de ce paragraphe sont l'objet du chapitre 3.

Le dernier thème que l'on abordera est celui des fonctions analytiques. Il s'agit de fonctions qui au voisinage de tout point de leurs domaines de définition sont des limites de séries entières. En particulier, il en découlera que les fonctions analytiques sont infiniment dérivables. De plus, on verra qu'elles sont extrêmement rigides à travers deux principes remarquables : le principe du prolongement analytique et le principe des zéros isolés. Le premier stipule que si deux fonctions analytiques coïncident sur une portion de l'intersection de leurs domaines de définition, alors elles coïncident sur l'union de leurs domaines de définition. Le second signifie que les points où une fonction analytique s'annule ne peuvent pas s'accumuler, si tant est que la fonction analytique n'est pas identiquement nulle. Enfin, on verra à travers les formules de Taylor que les fonctions analytiques peuvent approximer en un point des fonctions suffisamment régulières et on déduira de ces formules une stratégie pour montrer l'analycité de certaines fonctions. Les considérations de ce paragraphe sont l'objet du chapitre 4.

On mentionne maintenant quelques domaines d'application des suites et séries de fonctions : en analyse, comme mentionné dans le paragraphe précédent, elles permettent de d'approximer des fonctions suffisamment régulières en un point à travers les développements de Taylor, en analyse et géométrie complexe elles sont à la base de l'étude des fonctions dérivables au sens complexe, dites holomorphes, en analyse de Fourier elles permettent de transformer des fonctions de la variable temporelle et fonctions de la variable fréquentielle, ce qui donne lieu à des applications en physique et théorie du contrôle.

Enfin, dans tout le cours, on considère des fonctions définies sur un intervalle réelle et à valeurs réelles. Cependant, comme on le mentionnera au fil des chapitres, les résultats précédents peuvent être adaptés à des fonctions définies sur un domaine du plan complexe et à valeurs complexes, ce qui est le domaine de l'analyse complexe et des fonctions holomorphes. Enfin, il y aurait aussi du sens à étudier des fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs complexes, comme en analyse de Fourier.

Chapitre 2 :

Différentes formes de convergence

Dans ce chapitre, on définit les suites et séries de fonctions, on introduit différentes formes de convergence et et on montre les implications qui les relient. On présente également le critère de Cauchy et le M-test, qui caractérisent deux des formes de convergence : l'uniforme et la normale, respectivement. La première section porte sur les suites de fonctions et la deuxième sur les séries de fonctions.

Dans tout ce qui suit, $I \subseteq \mathbb{R}$ désigne un intervalle ouvert ou fermé, les fonctions que l'on considère sont de la forme $f : I \to \mathbb{R}$, et on note l'ensemble de ces fonctions :

$$\mathscr{F}(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}\}.$$

Bien que l'on se restreigne à des fonctions réelles, aussi bien pour leurs domaines que leurs co-domaines, les résultats qu'on présente peuvent être adaptés à des fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs complexes ou des fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et à valeurs complexes.

2.1. Convergence des suites de fonctions

Dans cette section, on introduit les suites de fonctions et deux formes de convergence pour celles-ci : la convergence simple et la convergence uniforme. Bien que, comme son nom l'indique, la convergence simple est la forme de convergence la plus simple d'un point de vue théorique, on verra qu'elle n'a pas de bonnes propriétés de passage à la limite. Au contraire, la convergence uniforme a ces propriétés, ce qui justifie son intérêt.

Une *suite de fonctions* est une suite $\left(f_n\right)_n$ d'éléments de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On commence par présenter la forme de convergence la plus faible qu'on rencontre dans ce chapitre.

Définition 2.1. Une suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ *converge simplement* vers une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ si pour tout $x \in I$, la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_n$ converge vers $f(x) \in \mathbb{R}$.

Bien qu'il existe plusieurs autres formes de convergence, on en présente seulement une deuxième. Pour cela, on commence par munir $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ d'une structure d'espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication scalaire définies par : pour $f, g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in I$, on pose

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Le vecteur nul est la fonction identiquement nulle, définie par : pour tout $x \in I$, on a $f(x) = 0$. On introduit maintenant la *norme infinie* $||\bullet||_\infty$, définie par : pour tout $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, on pose

$$\left|\left|f\right|\right|_\infty = \sup_I \left|f(x)\right|.$$

En d'autres termes, soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ est *bornée*, *i.e.*, il existe une constante $M \geq 0$, dite de majoration, telle que pour tout $x \in I$, on a $\left|f(x)\right| \leq M$, et dans ce cas $\left|\left|f\right|\right|_\infty$ est la plus petite constante de majoration de f, soit f n'est pas bornée, et dans ce cas $\left|\left|f\right|\right|_\infty = \infty$. La norme infinie sur $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ vérifie les axiomes d'une norme. En effet, $\left|\left|f\right|\right|_\infty = 0$, signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|f(x)\right| = 0$, *i.e.*, $f(x) = 0$, de sorte que f est la fonction identiquement nulle. De plus, pour $f, g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in I$, on a

$$\left|(f+g)(x)\right| = \left|f(x)+g(x)\right| \leq \left|f(x)\right| + \left|g(x)\right| \leq \left|\left|f\right|\right|_\infty + \left|\left|g\right|\right|_\infty \qquad \text{et} \qquad \left|(\lambda f)(x)\right| = \left|\lambda f(x)\right| = |\lambda|\left|f(x)\right|,$$

et donc, en passant au sup dans l'inégalité de gauche et dans l'égalité de droite :

$$\left|\left|f+g\right|\right|_\infty \leq \left|\left|f\right|\right|_\infty + \left|\left|g\right|\right|_\infty \qquad \text{et} \qquad \left|\left|\lambda f\right|\right|_\infty = |\lambda|\left|\left|f\right|\right|_\infty.$$

Remarque 2.2. Puisque $||\bullet||_\infty$ prend des valeurs infinies, on devrait en fait parler de *norme étendue* et non de normes. Si l'on voulait avoir un espace vectoriel muni d'une norme ne prenant que des valeurs finies, il faudrait considérer le sous-espace vectoriel $\mathscr{F}_b(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions bornées. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel, car la fonction nulle est bornée, avec 0 comme constante de majoration, de plus si $f, g \in \mathscr{F}_b(I,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g \in \mathscr{F}_b(I,\mathbb{R})$, puisque

$$\left|\left|f+\lambda g\right|\right|_\infty \leq \left|\left|f\right|\right|_\infty + \left|\left|\lambda g\right|\right|_\infty = \left|\left|f\right|\right|_\infty + |\lambda|\left|\left|g\right|\right|_\infty < \infty,$$

ce qui montre que $f + \lambda g$ a pour constante de majoration $\left|\left|f\right|\right|_\infty + |\lambda|\left|\left|g\right|\right|_\infty$. Par simplicité, on continue dans la suite de parler de norme et non de norme étendue, y compris pour les fonctions non bornées.

On peut maintenant introduire la notion de convergence uniforme.

Définition 2.3. Une suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ *converge uniformément* vers une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ si

$$\left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty = \sup_I \left|f_n(x) - f(x)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Avant de s'intéresser aux différences entre les convergences simple et uniforme, on note qu'elles ont en commun qu'elles vérifient la propriété de linéarité de la limite. En effet, soient $\left(f_n\right)_n$ et $\left(g_n\right)_n$ des suites de fonctions convergeant simplement ou uniformément vers des fonctions f et g, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans le cas de la convergence simple, pour tout $x \in I$, on a

$$\left|\left(f_n + \lambda g_n\right)(x) - \left(f+\lambda g\right)(x)\right| = \left|\left(f_n(x) - f(x)\right) + \lambda\left(g_n(x) - g(x)\right)\right| \leq \left|\left(f_n(x)-f(x)\right)\right| + |\lambda|\left|\left(g_n(x) - g(x)\right)\right|,$$

et comme $\left|\left(f_n(x) - f(x)\right)\right|$ et $\left|\left(g_n(x) - g(x)\right)\right|$ tendent vers 0 quand $n \to \infty$, alors $\left|\left(f_n + \lambda g_n\right)(x) - \left(f+\lambda g\right)(x)\right|$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, ce qui montre que la suite de fonctions $\left(f_n + \lambda g_n\right)_n$ tend simplement vers la fonction $f + \lambda g$. Dans le cas de la convergence uniforme, on a

$$\left|\left|\left(f_n + \lambda g_n\right) - \left(f + \lambda g\right)\right|\right|_\infty = \left|\left|\left(f_n - f\right) + \lambda\left(g_n - g\right)\right|\right|_\infty \leq \left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty + |\lambda|\left|\left|g_n - g\right|\right|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre que la suite de fonctions $\left(f_n + \lambda g_n\right)_n$ tend uniformément vers la fonction $f + \lambda g$.

On s'intéresse maintenant aux différences entre les deux formes de convergence. Bien que plus complexe que la notion de convergence simple, celle de convergence uniforme a de meilleures propriétés. Tout d'abord, la convergence uniforme entraîne la convergence simple, comme énoncé dans la proposition suivante, et on verra ensuite que la réciproque est fausse.

Proposition 2.4. *Si une suite de fonctions converge uniformément vers $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, alors elle converge simplement vers f.*

Démonstration. Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, de sorte que $\left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$, et donc, pour tout $x \in I$, on a

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

i.e., la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_n$ tend vers $f(x) \in \mathbb{R}$, ce qui montre que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ tend simplement vers f. □

La réciproque est fausse. En effet, on considère $I = [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ définie par $f_n(x) = x^n$, pour tout $x \in I$. Si $0 \leq x < 1$, on a $x^n \to 0$ quand $x \to \infty$, et si $x = 1$, la suite numérique $\left(f_n(1)\right)_n$ est constante égale à 1. Ainsi, la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ tend simplement vers la fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ définie par : si $0 \leq x < 1$, on a $f(x) = 0$ et $f(1) = 1$. Cependant, la convergence n'est pas uniforme, car pour tout $n \geq 1$, on a $0 < e^{-1/n} < 1$ et

$$\left|f_n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) - f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)\right| = \left|\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n - 0\right| = e^{-1} = \frac{1}{e} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{e} \leq \left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty \underset{n\to\infty}{\not\to} 0.$$

Remarque 2.5. Le contre-exemple précédent illustre la différence entre convergences simple et uniforme à travers les deux points suivants.

- La convergence simple signifie que des suites numériques $\left(f_n(x)\right)_n$ indexées par $x \in I$ admettent des limites, mais il n'y a pas de condition de cohérence quant à la façon dont chacune de ces suites converge, *i.e.*, la vitesse de convergence dépend de x. La convergence uniforme cependant signifie que ces suites convergent au même rythme ou à la même vitesse vers leurs limites. En termes de graphe, la convergence uniforme signifie que le graphe des f_n converge vers celui de f.
- On peut également observer cette différence à travers les raisonnements avec les ε. La convergence simple de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ vers f s'écrit formellement

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_x \in \mathbb{N}:\ n \geq N_x \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon,$$

  où on note N_x pour indiquer que cet entier dépend de x, qui est placé avant le ε. La convergence uniforme de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ vers f signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty \leq \varepsilon$, *i.e.*, pour tout $x \in I$, on a $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon$; donc, en résumé :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ (n \geq N, x \in I) \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon,$$

  où cette fois-ci le N ne dépend pas de x, qui est placé après la ε. Si on reprend $I = [0,1]$ et $f_n(x) = x^n$, alors si $x \in \{0,1\}$, la suite $\left(f_n(x)\right)_n$ est constante égale à $0 = f(0)$ ou $1 = f(1)$. De plus, si $0 < x < 1$, on a $\log x < 0$, donc la suite numérique $\left(n \log x\right)_n$ est décroissante, de sorte que pour tout $0 < \varepsilon < 1$, en prenant $N_x = \lfloor \log \varepsilon / \log x \rfloor + 1$, qui est positif car $\log \varepsilon$ et $\log x$ sont négatifs, pour tout $n \geq N_x$, on a

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|x^n - 0\right| = \left|e^{n \log x}\right| = e^{n \log x} \leq e^{N_x \log x} \leq e^{\log \varepsilon} = \varepsilon.$$

  La dernière inégalité provient du fait que $N_x \geq \log \varepsilon / \log x$ et donc $N_x \log x \leq \log \varepsilon$. De plus, on observe que le rang N_x dépend de x, ce qui indique que la convergence ne peut pas être uniforme.

Ces deux remarques justifient l'adjectif "uniforme" : dans le premier cas, le mot uniforme qualifie le fait que c'est un graphe et non un ensemble de suites numériques qui convergent, dans le deuxième, il qualifie le fait que le rang N est choisi uniformément pour tout $x \in I$.

Outre le fait que la convergence uniforme implique la convergence simple, elle a comme avantage sur la convergence simple qu'elle admet de meilleures propriétés par passage à la limite. On commence par constater que la convergence simple ne vérifie pas certaines propriétés par passage à la limite, puis on montre que la convergence uniforme les vérifient.

D'abord, une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue. En effet, si on reprend l'exemple avec $I = [0,1]$ et $f_n(x) = x^n$, pour tout $x \in I$, alors $\left(f_n\right)_n$ est une suite de fonctions continues dont la limite simple f, définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 1$, n'est pas continue sur I.

Ensuite, on ne peut pas inverser limite et intégrale, *i.e.*, si la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ converge simplement vers f, alors la suite numérique $\left(\int_I f_n(x)dx\right)_n$ ne tend pas nécessairement vers $\int_I f(x)dx$. En effet, on considère $I = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$, et pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq n, \\ 0, & \text{si} \quad x > n. \end{cases}$$

La suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle : en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en prenant $N_x = \lfloor 1/x \rfloor + 1 > 1/x$, alors pour tout $n \geq N_x$, on a $f_n(x) = 0$ puisque $x > 1/N_x \geq 1/n$. Or, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\int_I f_n(x)dx = \int_0^n \frac{1}{n}dx = 1,$$

donc la suite numérique $\left(\int_I f_n(x)dx\right)_n$ ne tend pas vers $0 = \int_I 0dx$.

Enfin, on ne peut pas inverser limite et dérivation, *i.e.*, si une suite de fonctions dérivables $\left(f_n\right)_n$ converge simplement vers une fonction dérivable f, alors la suite des dérivées $\left(f_n'\right)_n$ ne converge pas nécessairement simplement vers la dérivée de f. On considère par exemple $I = \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Alors, la suite $\left(f_n\right)_n$ tend simplement vers la fonction identiquement nulle, qui est dérivable avec dérivée elle-même. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(nx)| \leq 1$, et donc

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n} - 0\right| = \frac{|\sin(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable et pour tout $x \in I$, on a $f_n'(x) = \cos(nx)$. Or, la suite de fonctions $\left(f_n'\right)_n$ ne converge pas simplement, donc *a fortiori*, ne converge pas simplement vers la fonction identiquement nulle. Cet exemple montre que le résultat d'inversion reste faux si l'on suppose que les dérivées f_n' sont continues, et que si suite de fonctions dérivables converge simplement, alors sa limite peut avoir une dérivée sans que la suite des dérivées ait une limite.

Maintenant que l'on a vu que la limite simple ne vérifie pas de nombreuses propriétés de passage à la limite, on montre que ce n'est pas le cas pour la convergence uniforme.

Théorème 2.6. *Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Si les f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.*

Démonstration. Soient $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in I$, on a $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon$. Par continuité de f_n, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow \left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \delta$, puisque

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| = \left|(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))\right|,$$

on a

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \leq \left|f_n(x) - f(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| + \left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| \leq 3\varepsilon.$$

Ainsi, f est bien continue en x_0, et donc continue sur I. □

Grâce à ce résultat, on retrouve que la suite de fonctions définie par $f_n(x) = x^n$, pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, ne converge pas uniformément vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 1$, car sinon, f serait une limite uniforme non continue d'une suite de fonctions continues.

Maintenant, on présente une résultat d'inversion limite et primitive.

Théorème 2.7. *Soient $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Si I est borné, si les f_n sont continues et si l'on note F_n la primitive de f_n qui s'annule en x_0, alors la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément vers la primitive de f qui s'annule en x_0.*

Démonstration. Tout d'abord, on note que f étant limite uniforme de fonctions continues, elle est continue d'après le théorème 2.6, ce qui justifie qu'elle admet une primitive. De plus, les fonctions F_n et la primitive F de f qui s'annule en x_0 sont définies par : pour tout $x \in I$, on a

$$F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Puisque la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément vers f, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty \leq \varepsilon$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on a

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} \left(f_n(t) - f(t)\right) dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} \left|f_n(t) - f(t)\right| dt.$$

Or, pour tout $t \in [x_0, x]$, on a $\left|f_n(t) - f(t)\right| \leq \left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty$, donc, en notant $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ les bornes de I, pour tout $x \in I$ et tout $n \geq N$, on a

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \int_{x_0}^{x} \left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty dt \leq \int_{a}^{b} \left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty dt = |a-b| \left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty \leq |a-b|\varepsilon.$$

En prenant le sup dans cette inégalité, on obtient que $||F_n - F||_\infty \leq |a-b|\varepsilon$, de sorte que la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément vers la fonction F. □

Remarque 2.8. Le résultat précédent requière de considérer un intervalle borné et l'hypothèse forte de convergence uniforme pour intervertir limite et intégration. La théorie de l'intégration de Lebesgue, que l'on n'aborde pas dans ce cours, a entre autres été introduite pour avoir des résultats d'inversion limite et intégration vrais sur des intervalles non bornés et avec des hypothèses moins fortes que la convergence uniforme.

En conséquence du théorème 2.7, on a le résultat d'inversion limite et intégrale suivant.

Corollaire 2.9. *Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Si I est borné et si les f_n sont continues, alors la suite numérique $\left(\int_I f_n(x)dx\right)_n$ converge vers $\int_I f(x)dx$.*

Démonstration. Comme précédemment, on note $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ les bornes de I, on fixe $x_0 \in I$ et on note les primitives de f_n, pour $n \in \mathbb{N}$, et de f qui s'annulent en x_0, respectivement F_n et F. D'après théorème 2.7, la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément vers la fonction F, et donc, d'après la proposition 2.4, elle converge simplement vers F. Ainsi, les suites numériques $(F_n(a))_n$ et $(F_n(b))_n$ convergent respectivement vers $F(a)$ et $F(b)$, et donc on a

$$\int_a^b f_n(x)dx = [F_n(x)]_a^b = F_n(b) - F_n(a) \underset{n\to\infty}{\to} F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Enfin, le dernier résultat de passage à la limite que l'on présente est l'inversion limite et dérivation. Dans la démonstration de ce résultat, on utilise le lemme 2.10. On rappelle qu'étant donné $a \in I$, la fonction f constante égale à a est définie par : pour tout $x \in I$, on a $f(x) = a$.

Lemme 2.10. *Soient (x_n) une suite numérique et $a \in \mathbb{R}$. En notant f_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f les fonctions constantes égales à x_n et a, respectivement, $(x_n)_n$ converge vers a si et seulement si $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément vers f.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty = \sup_I \left|f_n(x) - f(x)\right| = \sup_I |x_n - a| = |x_n - a|.$$

Ainsi, $|x_n - a|$ tend vers 0 si et seulement $\left|\left|f_n - f\right|\right|_\infty$ tend vers 0, ce qui montre le résultat. □

Théorème 2.11. *Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions convergeant simplement vers une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Si l'intervalle I est borné, si les f_n ont des dérivées continues et si la suite des dérivées $\left(f_n'\right)_n$ converge uniformément vers $g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, alors f est dérivable, de dérivée continue, et on a $f' = g$.*

Démonstration. On note comme précédemment $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ les bornes de I, on considère la suite de fonctions $\left(f_n'\right)_n$, et on considère les primitives F_n et G des f_n' et de g qui s'annulent en $x = a$, définies par

$$F_n(x) = \int_a^x f_n'(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

pour tout $x \in I$. On note que G existe par continuité de la fonction g, ce qui découle du fait qu'elle est limite uniforme d'une suite de fonctions continues $\left(f_n'\right)_n$ et du théorème 2.6. La suite $\left(f_n'\right)_n$ converge uniformément vers g, l'intervalle I est borné et les f_n' sont continues, ainsi, d'après le théorème 2.7, la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément vers G, et donc simplement d'après la proposition 2.4. De plus, les fonctions f_n vérifient

$$f_n(x) = f_n(a) + \big(f_n(x) - f_n(a)\big) = f_n(a) + \left[f_n(t)\right]_a^x = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt,$$

pour tout $x \in I$. La suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ convergeant simplement vers f, la suite numérique $\left(f_n(a)\right)_n$ tend vers $f(a)$, donc la suite de fonctions constantes égales à $f_n(a)$ converge uniformément vers la fonction constante égale à $f(a)$ d'après le lemme 2.10. Par linéarité de la limite uniforme la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ tend uniformément, et donc simplement d'après la proposition 2.4, vers la fonction h définie par : pour tout $x \in I$, on a

$$h(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Par ailleurs, la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ tend simplement vers f par hypothèse, de sorte que $f = h$ et donc pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

On en déduit donc que f est dérivable et que sa dérivée est égale à g, qui est continue. $\square$

Remarque 2.12. En reprenant les notations de la démonstration du théorème 2.11, on a vu que f est égale à la fonction h, qui est limite uniforme de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$. Ainsi, dans les hypothèses du théorème 2.11, on pourrait remplacer l'hypothèse de convergence simple par une hypothèse de convergence uniforme sans que l'on renforce effectivement en fait les hypothèses.

Enfin, on termine cette section en énonçant le critère de Cauchy pour qu'une suite de fonctions converge uniformément. On commence par quelques rappels sur les suites de Cauchy : une suite numérique $(x_n)_n$ est dite *de Cauchy* si $|x_n - x_m| \to 0$ quand $n, m \to \infty$. Avec les ε, cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

On admet que $\mathbb{R}$ est un *espace complet*, *i.e.*, une suite numérique $(x_n)_n$ converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Dans le prochain théorème, on montre qu'une suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément si et seulement si elle vérifie $\left|\left|f_n - f_m\right|\right|_\infty \to 0$, quand $n, m \to \infty$. Reprenant la caractérisation (2.1) avec les ε de la propriété analogue pour les suites numériques, dans le cas des suites de fonctions, cela donne

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ n, m \geq N \Rightarrow \left|\left|f_n - f_m\right|\right|_\infty \leq \varepsilon.$$

Or, $\left|\left|f_n - f_m\right|\right|_\infty \leq \varepsilon$ signifie que pour tout $x \in I$, on a $\left|f_n(x) - f_m(x)\right| \leq \varepsilon$, donc en résumé, $\left|\left|f_n - f_m\right|\right|_\infty \to 0$ quand $n, m \to \infty$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ (n, m \geq N, x \in I) \Rightarrow \left|f_n(x) - f_m(x)\right| \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Théorème 2.13. *Une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément si et seulement si $||f_n - f_m||_\infty \to 0$ quand $n, m \to \infty$.*

Démonstration. Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, alors pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$||f_n - f_m||_\infty = ||(f_n - f) - (f_m - f)||_\infty \leq ||f_n - f||_\infty + ||f_m - f||_\infty \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Réciproquement, on suppose que $||f_n - f_m||_\infty \to 0$ quand $n, m \to \infty$, et on fixe $\varepsilon > 0$. D'après (2.2), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$ et tout $x \in I$, on a $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$, ce qui montre que la suite numérique $(f_n(x))_n$ est de Cauchy. Par complétude de $\mathbb{R}$, cette suite converge vers un réel noté $f(x)$, de sorte que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ définie par : pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Or, pour tout $x \in I$ et tout $n \geq N$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon,$$

car $f_m(x) \to f(x)$ quand $m \to \infty$, et quand m est suffisamment grand, on a $n, m \geq N$. En passant au sup dans l'inégalité précédente, on a $||f_n - f||_\infty \leq \varepsilon$, ce qui montre que $||f_n - f||_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$, *i.e.*, la suite de fonctions $(f_n)_n$ tend uniformément vers f. □

Remarque 2.14. On note l'analogie entre la notion de suites numériques de Cauchy et le critère de Cauchy du théorème 2.13. Cela vient du fait qu'on peut définir les suites de Cauchy dans n'importe quel espace normé, et même dans n'importe quel espace métrique, notion que l'on n'aborde pas dans ce cours. Comme mentionné dans la remarque 2.2, l'espace $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ n'est pas muni d'une norme mais d'une norme étendue. Donc pour définir des suite de Cauchy, on doit se restreindre au sous espace $\mathscr{F}_b(I, \mathbb{R})$ des fonctions bornées, et alors, le théorème 2.13 signifie qu'une suite de cet espace converge si et seulement si elle est de Cauchy, *i.e.*, que $\mathscr{F}_b(I, \mathbb{R})$ est un espace complet.

2.2. Convergence des séries de fonctions

Dans cette section, on introduit les séries de fonctions, définies comme étant des suites de somme de fonctions. On verra qu'outre la convergence simple et la convergence uniforme, deux autres formes de convergence apparaissent pour les séries de fonctions, appelées convergence uniforme absolue et convergence normale, dont on verra comment elles sont reliées aux convergences simple et uniforme. Avant d'introduire ces nouvelles formes de convergence, on spécifiera les résultats de passage à la limite introduits dans la section précédente au contexte des séries de fonctions.

On commence par quelques rappels sur les suites numériques, qui, informellement, sont des sommes infinies de nombres. Formellement, une *série numérique* est une suite de sommes partielles $(S_n)_n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

où $(a_n)_n$ est une suite numérique, l'élément a_n étant appelé le *terme général* de la série numérique. La série numérique de terme général a_n est notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est une suite, on peut parler de sa convergence ou de divergence, on écrit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$ pour spécifier qu'elle converge, et dans ce cas, on note également $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ la valeur de la limite. On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *converge absolument* si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$. Une condition nécessaire pour que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge est que $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$; en effet, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

converge, alors la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = S_n - S_{n-1}$, on doit avoir $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$. De plus, la convergence absolue entraîne la convergence : si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge absolument, alors la suite de terme générale la somme partielle des valeurs absolues $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ est de Cauchy, et donc, pour tout $n \geq m$, on a

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_n\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \underset{n,m\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre que la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy, donc convergente par complétude de $\mathbb{R}$.

Remarque 2.15. On voudrait pointer deux surcharges, une de terminologie et une de notation.

- La terminologie "terme général" désigne deux choses différentes selon qu'on parle d'une suite numérique quelconque ou d'une série numérique. Pour une suite numérique $(a_n)_n$, le terme général est a_n, donc le terme général d'une série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, vue comme suite numérique, est la somme partielle. En revanche, si on parle du terme général de la série numérique vue comme une suite particulière et pas comme une suite quelconque, son terme général est a_n. Afin d'éviter toute ambiguité, on n'emploiera pas la terminologie de "terme général" pour une série numérique vue uniquement comme une suite puisqu'on emploiera à chaque fois la terminologie "somme partielle", et donc le terme général de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ désignera toujours a_n.
- La notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$: si l'on ne sait rien sur la convergence, cette notation désigne la suite des sommes partielles, et lorsqu'on sait que cette suite converge, elle désigne aussi la valeur de la limite. On note que cette dernière notation qui justifie qu'en cas de convergence on écrit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$: cela signifie que la suite des sommes partielles admet une limite finie.

Pour finir, on rappelle les règles de Cauchy et de d'Alembert permettant de déterminer si une série numérique converge absolument ou diverge. Ces règles seront utilisées dans le chapitre suivant pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Proposition 2.16. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ une série numérique.*

1). Règle de Cauchy *: soit $[0,\infty[\cup\{\infty\} \ni L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, alors*
   - *si $L < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge absolument,*
   - *si $L > 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge.*

2). Critère de d'Alembert *: s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $a_n \neq 0$, et si de plus la limite $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| / |a_n|$ existe, alors*
   - *si $L < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge absolument,*
   - *si $L > 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge.*

Démonstration.

1). Si $L < 1$, soit $L < k < 1$, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a $|a_n|^{\frac{1}{n}} < k$, *i.e.*, $|a_n| < k^n$. Puisqu'on a $k < 1$, alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n\geq n_0} |a_n| < \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n\geq n_0} k^n < \infty.$$

Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge absolument. Si on a $L > 1$, alors il existe une infinité de termes n tels que l'on ait $|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$, donc $|a_n| \geq 1$. Ainsi, on a $a_n \not\to 0$ quand $n \to \infty$, de sorte que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge.

2). Si $L < 1$, soit $L < k < 1$, de sorte qu'il existe $n_1 \geq n_0$, tel que pour tout $n \geq n_1$, on a $0 < |a_{n+1}| < k|a_n|$. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|a_{n_1+n}\right| < k^n \left|a_{n_1}\right|$, et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \sum_{n=0}^{n_1-1} |a_n| + \sum_{n\geq 0} \left|a_{n_1+n}\right| < \sum_{n=0}^{n_1-1} |a_n| + \left|a_{n_1}\right| \sum_{n\geq 0} k^n < \infty.$$

Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge absolument. Si $L > 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_1$, on a $L - \varepsilon < |a_{n+1}| / |a_n|$ et donc $1 < |a_{n+1}| / |a_n|$. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \neq \left|a_{n_1}\right| < \left|a_{n_1+n}\right|$, donc la suite $(a_n)_n$ ne tend pas vers 0 et donc la $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge.

□

On introduit maintenant les séries de fonctions. Par analogie avec les séries numériques, étant donnée une suite de fonctions $(f_n)_n$, on appelle *série de fonctions* de *terme général* f_n la suite des sommes partielles de fonctions

$$S_n^f = \sum_{k=0}^{n} f_n,$$

où le f en exposant permet de différencier les sommes partielles de suites numériques et de fonctions. On note $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ la série de fonctions de terme général f_n ; puisqu'il s'agit d'une suite de fonctions, on peut parler de sa convergence simple ou uniforme. Si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement, sa limite simple, notée S^f, est appelée *fonction somme* de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, il s'agit de la fonction définie par : pour tout $x \in I$, on a

$$S^f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Les théorèmes 2.6, 2.7, 2.11, 2.13 et le corollaire 2.9 étant valides pour les suites de fonctions en général, ils s'appliquent en particulier aux séries de fonctions; on s'apprête à les préciser dans ce cadre. Dans les énoncés des théorèmes 2.17, 2.18, 2.20 et du corollaire 2.19, on fixe systématiquement un série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ qui converge simplement (le plus souvent, uniformément). Dans leurs démonstrations, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera S_n^f et S^f les fonctions somme partielle et somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, respectivement. De plus, on supposera dans chaque énoncé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue, si bien que par combinaison linéaire, la fonction $S_n^f = f_0 + \cdots + f_n$ sera systématiquement continue.

D'abord, la fonction somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément est continue.

Théorème 2.17. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions convergeant uniformément. Si chaque fonction f_n est continue sur I, alors, la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est continue sur I.*

Démonstration. La suite de fonctions $\left(S_n^f\right)_n$ converge uniformément vers S^f et chaque S_n^f est continue. Ainsi, S^f est continue d'après le théorème 2.6. □

Le théorème suivant, permet d'exprimer la primitive de la fonction somme d'une série de fonctions convergeant uniformément grâce à la série des fonctions primitives.

Théorème 2.18. *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions convergeant uniformément et $x_0 \in I$. Si I est borné, si chaque fonction f_n est continue et si l'on note F_n la primitive de f_n qui s'annule en x_0, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n$ converge uniformément vers la primitive de la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ qui s'annule en x_0.*

Démonstration. La suite de fonctions $\left(S_n^f\right)_n$ converge uniformément vers S^f, I est borné et chaque S_n^f est continue. De plus, par linéarité de la dérivation, la fonction somme partielle S_n^F de $\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est une primitive de S_n^f ; enfin, comme on a $S_n^F(x_0) = F_0(x_0) + \cdots + F_n(x_0) = 0$, il s'agit de la primitive de S_n^f qui s'annule en x_0. Le résultat découle donc du théorème 2.7. □

Le corollaire suivant, qui est un résultat d'inversion somme et intégrale, est démontré en faisant appel au corollaire 2.9. Cependant, on pourrait reprendre la démonstration du corollaire 2.9 en invoquant le théorème 2.18 à la place du théorème 2.7.

Corollaire 2.19. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions convergeant uniformément. Si I est borné et si les f_n sont continues, alors on a l'égalité de réels*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_I f_n(x)\, dx \right) = \int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \right) dx.$$

Démonstration. La suite de fonctions $\left(S_n^f\right)_n$ converge uniformément vers S^f, I est borné et chaque S_n^f est continue, donc d'après le corollaire 2.9, la suite numérique de terme général

$$\int_I S_n^f(x)dx = \int_I \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)dx = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_I f_k(x)dx\right), \tag{2.3}$$

converge vers

$$\int_I S^f(x)dx = \int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)\right)dt.$$

Or, la limite de la suite numérique de terme général (2.3) est par définition d'une série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\int_I f_n(t)dt\right),$$

ce qui donne l'égalité souhaitée. □

Enfin, le résultat suivant est un théorème d'inversion somme et intégration.

Théorème 2.20. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions convergeant simplement. Si l'intervalle I est borné, si les f_n ont des dérivées continues et si la série des dérivées $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge uniformément, alors la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est dérivable, de dérivée continue égale à la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$.*

Démonstration. La suite de fonctions $\left(S_n^f\right)_n$ converge simplement vers S^f et I est borné. De plus, les dérivées f_n' des f_n étant continues, la fonction somme partielle des dérivées, qui est la dérivée de S_n^f par linéarité de la dérivation, $\left(S_n^f\right)' = f_0' + \cdots + f_n'$ est continue par combinaison linéaire de fonctions continues. Enfin, la série de fonctions des dérivées $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge uniformément vers sa somme partielle, et donc le résultat découle du théorème 2.11. □

Il s'agit bien d'un théorème d'inversion somme et dérivation, car en notant $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ les fonctions sommes des séries des primitives et dérivées, la conclusion du théorème s'écrit

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)' = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'.$$

Remarque 2.21. D'après le critère de Cauchy (2.2) pour la convergence uniforme d'une suite de fonctions, une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$ et tout $x \in I$, on a $\left|S_n^f(x) - S_n^f(x)\right| \leq \varepsilon$, où S_n^f est la fonction somme partielle. En d'autres termes, le critère de Cauchy spécifié aux séries de fonctions stipule que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ (n \geq m \geq N, x \in I) \Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \varepsilon. \tag{2.4}$$

Maintenant, comme annoncé en préambule de cette section, on introduit deux nouvelles formes de convergence pour les séries de fonctions. Avant cela, on a besoin de la notation suivante : étant donnée une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, on note $|f| \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ la fonction définie par : pour tout $x \in I$, on a $|f|(x) = |f(x)|$.

Définition 2.22. On dit qu'une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$

1). *converge uniformément absolument* si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ converge uniformément,

2). *converge normalement* si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge.

La terminologie "convergence uniforme absolue" provient du fait que la série des valeurs absolues des fonctions converge uniformément, et la terminologie "convergence normale" provient du fait que la série numérique des normes converge. De plus, on note que la définition de la convergence normale est l'analogue de la convergence absolue pour les séries numériques, où on remplace les valeurs absolues de nombres par les normes infinies de fonctions. On relie maintenant ces nouvelles formes de convergence aux convergences simple et uniforme.

Proposition 2.23. *Si une série de fonctions converge normalement, alors elle converge uniformément absolument et si elle converge uniformément absolument, alors elle converge uniformément.*

Démonstration. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions et $\varepsilon > 0$. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement. La suite des sommes partielles $(S_n)_n$ de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|f_n\right|\right|_\infty$ est donc de Cauchy, de sorte qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m \geq N$, on a $|S_n - S_m| = \sum_{k=m+1}^{n} \left|\left|f_k\right|\right|_\infty \leq \varepsilon$. Pour tout $n \geq m \geq N$ et tout $x \in I$, on a donc

$$\sum_{k=m+1}^{n} \left|f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left|\left|f_k\right|\right|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|f_n\right|$ vérifie le critère de Cauchy pour les séries de fonctions (2.4), donc elle converge uniformément, *i.e.*, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément absolument. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément absolument, de sorte que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|f_n\right|$ vérifie (2.4) ; ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m \geq N$ et tout $x \in I$, on a $\sum_{k=m+1}^{n} \left|f_k(x)\right| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq m \geq N$ et tout $x \in I$, on a

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left|f_k(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ vérifie le critère de Cauchy pour les séries de fonctions (2.4), donc elle converge uniformément.

$\square$

En résumé, on a quatre formes de convergence pour les séries de fonctions, dont on résume les implications par le diagramme suivant :

$$\text{normale} \quad \Rightarrow \quad \text{uniforme absolue} \quad \Rightarrow \quad \text{uniforme} \quad \Rightarrow \quad \text{simple}. \tag{2.5}$$

Aucune des implications réciproques n'est vraie, comme montré par les contres exemples suivants.

Le fait que la convergence simple n'implique pas la convergence uniforme se montre en adaptant le contre-exemple suivant la proposition 2.4. On considère $I = [0,1]$ et une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ telle que la somme partielle vérifie $S_n^f(x) = x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$. Alors, on a vu dans le contre-exemple suivant la proposition 2.4 que la suite de fonctions $\left(S_n^f\right)_n$ converge simplement mais ne converge pas uniformément, et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement mais ne converge pas uniformément. Pour construire les f_n explicitement, on peut prendre $f_0 : I \to \mathbb{R}$ la fonction constante égale à 1, et si $f_0, \cdots f_n$ ont été construites et vérifient que pour tout $x \in I$, on a $S_n^f(x) = x^n$, on définit la fonction $f_{n+1} : I \to \mathbb{R}$ par : pour tout $x \in I$, on a $f_{n+1}(x) = x^{n+1} - x^n$.

Le fait que la convergence uniforme n'implique pas la convergence absolue se montre en adaptant l'exemple $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n / n$ d'une série numérique convergeant mais ne convergeant pas absolument. On prend donc un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ quelconque et la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, où le terme général f_n est la fonction constante égale à $(-1)^n / n$. D'après le lemme 2.10, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément mais ne converge pas uniformément absolument.

On montre maintenant que la convergence uniforme absolue n'implique pas la convergence normale. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $I = \mathbb{R}$, définie par : pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{si} \quad n \leq x < n+1 \\ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions étant positives, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n = |f_n|$. Alors, en notant S_n^f la fonction somme partielle de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{1}{n}, & \text{si} \quad n \leq 1 < n+1, \quad \text{avec} \quad n \geq 1, \end{cases}$$

alors $f(x) - S_n^f(x) = 1/k$ s'il existe $k \geq n+1$ tel que $k \leq x < k+1$, et 0, sinon. Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément, et donc uniformément absolument, vers f car pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left|\left|f - S_n^f\right|\right|_\infty = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement, car pour tout $n \geq 1$, on a $||f_n||_\infty = 1/n$ et $\sum_{n\geq 1} 1/n$ diverge.

Le dernier résultat de ce chapitre est un critère de convergence normal, appelé le *M-test*.

Théorème 2.24. *Une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement si et seulement s'il existe une suite numérique $(M_n)_n$ telle que :*

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on a $|f_n(x)| \leq M_n$,*
- *la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n$ converge.*

Démonstration. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement, alors, la suite numérique $(||f_n||_\infty)_n$ vérifie les deux axiomes de l'énoncé. Réciproquement, si une suite $(M_n)_n$ vérifiant les deux axiomes de l'énoncé existe, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $||f_n||_\infty \leq M_n$ d'après le premier, et d'après le deuxième, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} ||f_k||_\infty \leq \sum_{k=0}^{n} M_k \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n < \infty.$$

En faisant tendre $n \to \infty$ dans cette inégalité, on obtient que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement. □

Remarque 2.25. La terminologie "M-test" vient du fait que le terme général de la suite numérique vérifiant les deux axiomes est traditionnellement notée avec des "M". De plus, le M-test permettant de prouver la convergence normale, il prouve les autres formes de convergence d'après les propositions 2.4 et 2.23, résumées dans (2.5).

On finit cette section par un exemple illustrant l'utilisation du M-test.

Exemple 2.26. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ définie par : pour tout $n \geq 1$, on a

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2},$$

pour tout $x \in I = \mathbb{R}$. Or, en notant $M_n = 1/n^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = M_n,$$

de plus, $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge. Ainsi, la suite $(M_n)_n$ vérifie les deux axiomes du M-test, et donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément absolument, uniformément et simplement.

Chapitre 3 :

Séries entières réelles

Dans ce chapitre, on introduit les séries entières réelles, définies comme étant des séries de fonctions polynomiales. Dans la première section, on définit le rayon et l'intervalle de convergence d'une série entière réelle et on donne deux critères pour déterminer le rayon de convergence. Dans la deuxième section, on définit les opérations d'addition et de multiplication de séries entières réelles, on montre qu'une série entière réelle converge normalement sur son intervalle de convergence, puis on applique les résultats de la section 2.2 pour montrer que la fonction somme d'une série entière réelle est infiniment dérivable sur son intervalle de convergence, et que sa dérivée est donnée en dérivant sous le signe somme.

On considère des fonctions définies sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, cette fois-ci supposé ouvert, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cependant, les résultats qu'on présente peuvent être adaptés à des séries entières complexes définies sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Puisqu'on ne traitera pas de séries entières complexes, on parlera simplement de séries entières sans spécifier l'adjectif "réelles".

3.1. Rayon de convergence d'une série entière

Dans cette section, on définit les séries entières, leurs rayons et intervalles de convergence et on donne des critères permettant de déterminer le rayon de convergence d'une série entière. Par abus de notation, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-a)^n$ sera notée $(x-a)^n$.

Définition 3.1. Étant donné $a \in \mathbb{R}$, une *série entière* est une série de fonctions dont le terme général est de la forme $a_n(x-a)^n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \in \mathbb{R}$. On note une telle série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$, et on appelle a et a_n le *centre* et les *coefficients* de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$, respectivement.

On dit que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ *converge*, *converge absolument* ou *diverge* en $x_0 \in \mathbb{R}$, si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ converge, converge absolument ou diverge. On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge ou converge absolument sur I si elle converge ou converge absolument en tout point de I.

Remarque 3.2. Afin de différencier les notations d'une série entière, *i.e.*, la série des sommes partielles de fonctions polynomiales, et la série numérique obtenue par évaluation de la série entière en un point de $\mathbb{R}$, on réserve la notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ à la série entière, et pour la seconde, on note le point d'évaluation par des lettres différentes de x, *e.g.*, x_0, x_1, ou b, et on note la série numérique obtenue en substituant x par le point considérer, *e.g.*, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ si le point est x_0. De plus, si cette dernière converge, comme dans le chapitre 2, on note $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ sa limite.

On va voir comment déterminer le lieu de convergence d'une série entière. Pour cela, on note

$$I(a,R) = \{x \in \mathbb{R},\ |x-a| < R\} = (a-R, a+R),$$

l'intervalle ouvert centré en $a \in \mathbb{R}$ et de rayon $R \geq 0$.

Lemme 3.3 (Abel)**.** *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ une série entière. Si elle converge en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors elle converge absolument sur $I(a, |x_0 - a|)$.*

Démonstration. Puisque la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge absolument en a, il suffit de montrer qu'elle converge absolument en tout $x_1 \in I(a, |x_0 - a|) \setminus \{a\}$; donc on fixe un tel point. Comme la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ converge, on doit avoir $a_n(x_0-a)^n \to 0$ quand $n \to \infty$, de sorte que la suite numérique $(a_n(x_0-a)^n)_n$ est bornée, *i.e.*, il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n(x_0-a)^n| \leq K$. Si on a $x_0 = a$, alors $I(a, |x_0 - a|) = \emptyset$, et il n'y a rien à démontrer. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|a_n(x_1-a)^n\right| = \left|a_n(x_0-a)^n\right| \frac{|(x_1-a)^n|}{|(x_0-a)^n|} \leq K \left|\frac{x_1-a}{x_0-a}\right|^n.$$

Or, puisque $x_1 \in I(a, |x_0 - a|)$, on a $|x_1 - a| < |x_0 - a|$, de sorte que $|(x_1-a)/(x_0-a)| < 1$, et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \left|a_k(x_1-a)^k\right| \leq K \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{x_1-a}{x_0-a}\right|^k \leq K \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{x_1-a}{x_0-a}\right|^n = \frac{K}{1-|(x_1-a)/(x_0-a)|}.$$

En faisant $n \to \infty$, on obtient que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge absolument en x_1. □

Maintenant, on énonce le résultat principal de cette section.

Théorème 3.4. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ une série entière. Il existe un unique $R \geq 0$ tel que les deux propriétés suivantes soient vraies :*

1). si $|x_0 - a| < R$, alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ converge absolument,

2). si $|x_0 - a| > R$, alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ diverge.

Démonstration. Si R' vérifie également les propriétés de R et que l'on a $R < R'$, alors il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel qu'on ait $R < |x_0 - a| < R'$, de sorte que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ converge absolument et diverge, ce qui est impossible, donc on a $R' \leq R$. On montre de même que $R \leq R'$, donc $R = R'$, *i.e.*, si R existe, alors il est unique. Pour montrer l'existence, on pose

$$E = \left\{ x_0 \in \mathbb{R},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n \text{ converge} \right\} \qquad \text{et} \qquad |E| = \{|x_0 - a|,\ x_0 \in E\}.$$

On a $a \in E$ et donc $0 \in |E|$, de sorte que $|E| \neq \emptyset$. On pose

$$R = \sup |E| \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

et on fixe $x_0 \in \mathbb{R}$. Si on a $|x_0 - a| < R$, alors il existe $x_1 \in E$ tel qu'on ait $|x_0 - a| < |x_1 - a|$. Or, $x_1 \in E$ signifie que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_1-a)^n$ converge, donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ converge absolument d'après le lemme 3.3. Si $|x_0 - a| > R$, alors $x_0 \notin E$, donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ diverge. Ainsi, R vérifie les deux propriétés du théorème. □

Avec les notations du théorème 3.4, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge absolument sur l'intervalle ouvert $I(a,R)$ et diverge en dehors de l'intervalle fermé $\overline{I}(a,R) = \{x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leq R\}$, d'où les définitions suivantes.

Définition 3.5. Étant donné une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$, le nombre $R \geq 0$ du théorème 3.4 et l'intervalle $I(a,R)$ s'appellent le *rayon* et l'*intervalle de convergence* de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$, respectivement.

Soit une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ de rayon de convergence $R > 0$, de sorte que $I(a,R) \neq \emptyset$. D'après le théorème 3.4, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge absolument, et donc converge, sur l'intervalle $I(a,R)$. Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge simplement sur $I(a,R)$, de sorte que sa fonction somme $S^f : I(a,R) \to \mathbb{R}$ est bien définie et vérifie $S^f(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$, pour tout $x_0 \in I(a,R)$.

On verra dans la suite deux règles permettant de calculer le rayon de convergence d'une série entière. Avant cela, on peut donner deux exemples où l'on n'a pas besoin de faire appel à ces règles.

Exemple 3.6.

1). Une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est dite *polynomiale* s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > n_0$, on a $a_n = 0$; dans ce cas, la série entière est notée $\sum_{n=0}^{n_0} a_n(x-a)^n$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n(x-a)^n| < \infty$, de sorte que la série entière polynomiale $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge absolument en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et a donc un rayon de convergence infini. De plus, si $\sum_{n=0}^{n_0} a_n(x-a)^n$ est une série entière polynomiale, alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n(x_0-a)^n = \sum_{k=0}^{n_0} a_k(x_0-a)^k = \sum_{k=0}^{n_0} a_k\left(\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}x_0^n(-a)^{k-n}\right) = \sum_{n=0}^{n_0}\left(\sum_{k=n}^{n_0} a_k\binom{n}{k}(-a)^{k-n}\right)x_0^n.$$

Ainsi, si pour tout $n \le n_0$, on pose $b_n = \sum_{k=n}^{n_0} a_k\binom{n}{k}(-a)^{k-n}$, alors les séries entières $\sum_{n=0}^{n_0} a_n(x-a)^n$ et $\sum_{n=0}^{n_0} b_n x^n$ ont la même fonction somme $S^f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$S^f(x_0) = \sum_{n=0}^{n_0} a_n(x_0-a)^n = \sum_{n=0}^{n_0} b_n x_0^n.$$

Du point de vue des fonctions sommes, une série entière polynomiale peut donc être supposée centrée en 0, de plus, on note que la fonction somme d'une telle série entière n'est rien d'autre qu'une fonction polynomiale.

2). La série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_0^n$ est absolument convergente pour $|x_0| < 1$ et diverge en 1. D'après le théorème 3.4, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$, centrée en 0, vaut 1. De plus, sa fonction somme $S^f : I(0,1) \to \mathbb{R}$ vérifie : pour tout $x_0 \in I(0,1)$, on a

$$S^f(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_0^n = \frac{1}{1-x_0}.$$

En conséquence des règles de d'Alembert et de Cauchy, démontrées dans la proposition 2.16, on énonce deux règles permettant de calculer le rayon de convergence d'une série entière. Dans celles-ci, on pose par convention que $1/\infty = 0$ et $1/0 = \infty$.

Théorème 3.7. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ une série entière.*

1). Formule d'Hadamard *: soit $[0,\infty[\cup\{\infty\} \ni L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est $1/L$.*

2). S'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge n_0$, on a $a_n \neq 0$, et si de plus la limite $L = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n|$ existe, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est égal à $1/L$.

Démonstration. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r = |x_0 - a| \ge 0$.

1). D'après la proposition 2.16, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n$ converge si $r < 1/L$, car dans ce cas :

$$\limsup_{n\to\infty} \left|a_n r^n\right|^{\frac{1}{n}} = r \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = rL < 1.$$

Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est supérieur à $1/L$. De plus, toujours d'après proposition 2.16, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n$ diverge dès que $r > 1/L$, car dans ce cas :

$$\limsup_{n\to\infty} \left|a_n r^n\right|^{\frac{1}{n}} = r \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = rL > 1.$$

Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ n'est pas strictement supérieur à $1/L$, de sorte qu'il vaut exactement $1/L$.

2). D'après la proposition 2.16, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, r^n$ converge si $r < 1/L$, car dans ce cas :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\, r^{n+1}}{|a_n|\, r^n} = r \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = rL < 1,$$

Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est supérieur à $1/L$. De plus, toujours d'après proposition 2.16, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, r^n$ diverge dès que $r > 1/L$, car dans ce cas :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\, r^{n+1}}{|a_n|\, r^n} = r \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = rL > 1.$$

Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ n'est pas strictement supérieur à $1/L$, de sorte qu'il vaut exactement $1/L$.

□

Exemple 3.8. On illustre le théorème 3.7 en reprenant l'exemple 3.6.

1). Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est une série entière polynomiale, pour tout $n > n_0$, on a $|a_n| = 0$ et donc $|a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$; donc on retrouve que le rayon de convergence d'une série entière polynomiale est infini.

2). Soit la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient a_n est égal à 1, de sorte que les suites numériques $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_n$ et $(|a_{n+1}|/|a_n|)_n$ sont constantes égales à 1. Ainsi, les deux critères du théorème 3.7 permettent de retrouver que le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ vaut 1.

La deuxième formule du théorème 3.7 est plus restrictive que la première dans le sens où elle suppose d'une part que les coefficients de la série entière dont ont calcule le rayon de convergence sont non nuls à partir d'un certain rang et d'autre part l'existence d'une limite. La deuxième condition ne peut pas être affaiblie car elle est basée sur le critère de d'Alembert de la proposition 2.16, qui suppose l'existence d'une limite. En revanche, la première peut être affaiblie en supposant simplement que la série entière étudiée a une infinité de coefficients non nuls. On note que cette dernière condition n'est pas restrictive, car les séries entières pour lesquelles il n'y a qu'un nombre fini de coefficients non nuls sont les séries entières polynomiales, dont on a vu dans les exemples 3.6 et 3.8 qu'elles ont un rayon de convergence infini.

On présente maintenant une formule étendant la deuxième formule du théorème 3.7 aux séries entières ayant une infinité de coefficients non nuls. Étant donnée une telle série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x_0)$ le $n$ième terme non nul de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ et

$$\ell(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x_0)|}{|u_n(x_0)|},$$

lorsque la limite existe. Alors, l'intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est l'ensemble des $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\ell(x_0) < 1$. En effet, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, les séries numériques $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x_0)$ étant les mêmes à des décalages d'indices près, l'une converge ou converge absolument si et seulement si l'autre converge ou converge absolument, et dans le cas où elles convergent, elles ont la même limite. Or, d'après le critère de d'Alembert de la proposition 2.16, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x_0)$ converge absolument si $\ell(x_0)$ existe et est strictement inférieur à 1. Par exemple, pour la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{2n}/n$, alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\ell(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,|x_0|^{2(n+1)}}{(n+1)\,|x_0|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left|x_0^2\right| = |x_0|^2,$$

de sorte que le rayon de convergence est 1. Si on considère maintenant la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x^{2n}$, alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\ell(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_0|^{2(n+1)}}{|x_0|^{2n}} = |x_0|^2,$$

de sorte que le rayon de convergence vaut également 1. De plus, la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x^{2n}$ est définie par : pour tout $x_0 \in I(0,1)$, on a

$$S^f(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x_0^2}.$$

Remarque 3.9. Soit une série entière de rayon de convergence R.

1). Si $R=\infty$, alors l'intervalle de convergence est $\mathbb{R}$ et la série entière converge absolument en tout point, et si $R=0$, la série entière converge absolument uniquement en a.

2). Si $0<R<\infty$, alors on ne peut pas prévoir le comportement de la série entière pour $|x_0-a|=R$. Par exemple, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n/n$ a rayon de convergence 1, elle diverge en 1 et converge en -1.

3.2. Opérations sur les séries entières

Dans cette section, on définit les opérations algébriques, de dérivation et d'intégration sur les séries entières et on montre qu'une série entière converge normalement sur les intervalles ouverts centrés en son centre et inclus dans son intervalle de convergence.

Théorème 3.10. *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(x-a)^n$ des séries entières de même centre a et de rayons de convergence respectifs R et R'.*

1). Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n)(x-a)^n$ est supérieur ou égal à $\min(R,R')$, de plus, pour tout $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $|x_0-a|<\min(R,R')$, on a l'égalité de séries numériques

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n)(x_0-a)^n=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(x_0-a)^n+\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n(x_0-a)^n.$$

2). Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}\right)(x-a)^n$ est supérieur ou égal à $\min(R,R')$, de plus, pour tout $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $|x_0-a|<\min(R,R')$, on a l'égalité de séries numériques

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}\right)(x_0-a)^n=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(x_0-a)^n\times\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n(x_0-a)^n\right).$$

Démonstration. Soit $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $|x_0-a|<\min(R,R')$.

1). Pour tout $n\geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n|a_k+b_k||x_0-a|^k\leq\sum_{k=0}^n(|a_k|+|b_k|)|x_0-a|^k=\sum_{k=0}^n|a_k||x-x_0|^k+\sum_{k=0}^n|b_k||x_0-a|^k,$$

or, on a

$$\sum_{k=0}^n|a_k||x_0-a|^k+\sum_{k=0}^n|b_k||x_0-a|^k\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n||x-x_0|^n+\sum_{n\in\mathbb{N}}|b_n||x_0-a|^n<\infty,$$

ce qui montre que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n)(x-a)^n$ converge absolument sur $I\left(a,\min(R,R')\right)$, donc son rayon de convergence est supérieur à $\min(R,R')$. De plus, pour tout $n\geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n(a_k+b_k)(x_0-a)^k=\sum_{k=0}^n a_k(x_0-a)^k+\sum_{k=0}^n b_k(x_0-a)^k,$$

et l'égalité de séries numériques voulue découle de la linéarité de la limite.

2). Pour tout $n\geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n\left|\sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}\right||x_0-a|^k\leq\sum_{k=0}^n\sum_{i=0}^k|a_i||b_{k-i}||x_0-a|^k=\left(\sum_{k=0}^n|a_k||x_0-a|^k\right)\times\left(\sum_{k=0}^n|b_k||x_0-a|^k\right),$$

or, on a

$$\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k||x_0-a|^k\right)\times\left(\sum_{k=0}^{n}|b_k||x_0-a|^k\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n||x_0-a|^n\right)\times\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|b_n||x_0-a|^n\right)<\infty,$$

ce qui montre que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)(x-a)^n$ converge absolument sur $I\left(a,\min(R,R')\right)$, donc son rayon de convergence est supérieur à $\min(R,R')$. De plus, pour tout $n\geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}\right)(x_0-a)^k=\left(\sum_{k=0}^{n}a_k(x_0-a)^k\right)\times\left(\sum_{k=0}^{n}b_k(x_0-a)^k\right),$$

et l'égalité voulue découle de la linéarité et de la multiplicativité de la limite.

□

Le rayon de convergence de la somme ou du produit de deux séries entières peut être strictement supérieur au plus petit des deux rayons de convergence. Par exemple, on a vu que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n$ a pour rayon de convergence 1 ; il en est donc de même pour la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}-x^n=-\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n$, donc le min de leurs deux rayons de convergence vaut 1, pourtant leur somme vaut 0 et a donc un rayon de convergence infini. De plus, si on prend la série entière $1-x$, alors son produit avec $\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n$ est constant égal à 1, et a donc un rayon de convergence infini, donc supérieur au min des rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n$ et $1-x$, qui vaut 1.

On montre maintenant qu'une série entière converge normalement sur son intervalle de convergence.

Proposition 3.11. *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(x-a)^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R>0$.

1). *Pour tout* $0<r<R$, *la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(x-a)^n$ *converge normalement sur* $I(a,r)$.

2). *La fonction somme de* $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(x-a)^n$ *est continue sur* $I(a,R)$.

Démonstration. On fixe $0<r<R$.

1). Pour tout $n\in\mathbb{N}$, en notant $||\cdot||_\infty$ la norme infinie sur $\mathscr{F}(I(a,r),\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\left|a_k(x-a)^k\right|\right|_\infty=\sum_{k=0}^{n}\sup_{I(a,r)}\left|a_k(x-a)^k\right|=\sum_{k=0}^{n}|a_k|\sup_{I(a,r)}|x-a|^k=\sum_{k=0}^{n}|a_k|r^k\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|r^n<\infty,$$

et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(x-a)^n$ converge normalement sur $I(a,r)$.

2). On a vu que $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(x-a)^n$ convergeait normalement sur $I(a,r)$, donc uniformément d'après proposition 2.23. Or, les fonctions $a_n(x-a)^n$ étant continues sur $I(a,r)$, le théorème 2.17 implique que la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(x-a)^n$ est continue sur $I(a,r)$. En faisant tendre $r\to R$, on en déduit que la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(x-a)^n$ est continue sur $I(a,R)$.

□

On s'intéresse maintenant à la dérivation et à l'intégration de séries entières. Suite à ce que l'on a vu pour les séries de fonctions dans la section 2.2, l'idéal pour dériver une série entière est de dériver sous le symbole somme. On appelle donc *série dérivée* d'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(x-a)^n$, la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}na_n(x-a)^{n-1}=\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n.$$

Dans le théorème 3.12, on montre que sur l'intervalle de convergence, la dérivée de la fonction somme d'une série entière est la fonction somme de sa série dérivée. Dans sa démonstration, on fait appel au théorème 2.20 qui suppose que l'intervalle de définition des fonctions est borné, ce qui pour les séries entières n'est vrai que si le rayon de convergence est fini. Ainsi, dans sa démonstration, pour montrer que la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence R est dérivable en un point $x_0\in I(a,R)$ et que la dérivée en x_0 est donné par la fonction somme de sa série dérivée, on fixe un $r<R$ tel que x_0 appartienne à $I(a,r)$, puis on applique le théorème 2.20 sur l'intervalle borné $I(a,r)$.

Théorème 3.12. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ une série entière de rayon de convergence R. Le rayon de convergence de la série dérivée de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ vaut également R. De plus, la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est dérivable sur $I(a,R)$ et sa dérivée est la fonction somme de la série dérivée de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$.*

Démonstration. On note R' le rayon de convergence de la série dérivée de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ et on commence par montrer que $R=R'$; pour cela, et on fixe $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$. Si on a $|x_0-a|>R$, alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ diverge, donc *a fortiori*, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n(x_0-a)|^n$ diverge, et la série numérique $\sum_{n\geq 1} |a_n(x_0-a)|^n$ également. Or, on a $|x_0-a|\neq 0$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$(n+1)\left|a_{n+1}(x_0-a)^n\right| \geq \left|a_{n+1}(x_0-a)^n\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|(n+1)a_{n+1}(x_0-a)^n\right| \geq \frac{1}{|(x_0-a)|}\left|a_{n+1}(x_0-a)^{n+1}\right|,$$

Puisque la série numérique $\sum_{n\geq 1} |a_n(x_0-a)|^n$ diverge, on déduit de l'inégalité précédente qu'il en est de même pour la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} |(n+1)a_{n+1}(x_0-a)^n|$, car on a

$$\sum_{k=0}^{n}\left|(k+1)a_{k+1}(x_0-a)^k\right| \geq \frac{1}{|x_0-a|}\sum_{k=0}^{n}\left|a_{k+1}(x_0-a)^{k+1}\right| = \frac{1}{|x_0-a|}\sum_{k=1}^{n+1}\left|a_k(x_0-a)^k\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Ainsi, la série dérivée de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ ne converge pas absolument en tout x_0 tel que $|x_0-a|>R$, et donc on a $R'\leq R$. Pour montrer l'autre inégalité, on commence par noter que si $R=0$, puisque $R\geq R'\geq 0$, on a $R'=0=R$. Sinon, on fixe $\rho\in\mathbb{R}$ tel que $|x_0-a|<\rho<R$; en particulier, on a $\rho\neq 0$, et on pose

$$r = \frac{|x_0-a|}{\rho} < 1.$$

On rappelle que $x_0\neq a$, donc on a $|x_0-a|\neq 0$ et donc $r\neq 0$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\left|(n+1)a_{n+1}(x_0-a)^n\right| = \frac{n+1}{\rho}\left(\frac{|x_0-a|}{\rho}\right)^n\left|a_{n+1}\rho^{n+1}\right| = \frac{(n+1)r^n}{\rho}\left|a_{n+1}\rho^{n+1}\right|. \tag{3.1}$$

Or, r étant non nul, le terme général $(n+1)r^n$ de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)r^n$ est toujours non nul, et cette dernière converge absolument d'après le deuxième critère de la proposition 2.16, car on a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)r^{n+1}}{(n+1)r^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)r = r < 1.$$

En particulier, le terme général $(n+1)r^n$ de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)r^n$ tend vers 0 quand $n\to\infty$, donc il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $(n+1)r^n\leq M$. Ainsi, d'après (3.1), pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\left|(k+1)a_{k+1}(x_0-a)^k\right| \leq \frac{M}{\rho}\times\sum_{k=0}^{n}\left|a_{k+1}\rho^{k+1}\right| = \frac{M}{\rho}\times\sum_{k=1}^{n+1}\left|a_k\rho^k\right|. \tag{3.2}$$

Or, on a $\rho<R$, donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left|a_n\rho^n\right|$ converge ; en effet, il suffit de prendre $x_1\in\mathbb{R}$ tel que $|x_1-a|=\rho<R$, et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge absolument en x_1. On en déduit que la série numérique $\sum_{n\geq 1}\left|a_n\rho^n\right|$ converge également, et donc d'après (3.2), la série dérivée de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge absolument en x_0. On a donc montré que pour tout $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $|x_0-r|<R$, la série dérivée de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge absolument en x_0 et donc on a $R\leq R'$, et donc $R=R'$. On montre maintenant la deuxième assertion du théorème. Soient $x_0\in I(a,R)$ et $r<R$ tels que $x_0\in I(a,r)$. D'après la proposition 3.11, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge normalement sur $I(a,r)$, donc simplement d'après la suite d'implications (2.5), de plus $I(a,r)$ est borné. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $a_n(x-a)^n$ est continue, de dérivée continue $na_n(x-a)^{n-1}$. De plus, $\sum_{n\in\mathbb{N}} na_n(x-a)^{n-1}$ est la série dérivée de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$, donc son rayon de convergence est également R, ainsi elle converge normalement sur $I(a,R)$ d'après la proposition 3.11, donc elle converge normalement sur $I(a,r)$, donc uniformément sur $I(x_0,r)$ d'après les implications (2.5). D'après le théorème 2.20, la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est donc dérivable sur $I(a,r)$, de dérivée la fonction somme de la série dérivée de. Pour terminer la démonstration, reste à faire $r\to R$. □

On déduit du théorème 3.12 que la fonction somme d'une série entière est infiniment dérivable sur son intervalle de convergence et que ses dérivées sont les fonctions somme de séries entières dont on peut déterminer les expressions explicites. Dans l'énoncé du corollaire suivant, on prend la convention qu'étant donnés deux entiers $n, k \in \mathbb{N}$, si $n < k$, alors $n!/(n-k)! = 0$ et on rappelle que par convention, 0! vaut 1.

Corollaire 3.13. *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors, la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est infiniment dérivable sur $I(a,R)$, et pour $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée $k$ième est la fonction somme de la série entière*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}(x-a)^n. \tag{3.3}$$

Démonstration. Pour $k = 0$, la dérivée $k$ième de la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est donnée par la fonction somme de la série entière elle-même, et on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{(n-0)!} a_n(x-a)^{n-0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+0)!}{n!} a_{n+0}(x-a)^n,$$

de plus cette fonction est dérivable sur $I(a,R)$. On suppose maintenant que la dérivée $k$ième de la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est donnée par la fonction somme de (3.3), que le rayon de convergence de (3.3) est R et que la fonction somme de (3.3) est dérivable sur $I(a,R)$. En particulier, on sait déjà que la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est $(k+1)$ fois dérivable. D'après le théorème 3.12, la dérivée de la fonction somme de (3.3) est la fonction somme de sa série dérivée, *i.e.*,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (n-k)\frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\frac{(n+1+k)!}{(n+1)!} a_{n+1+k}(x-a)^n.$$

Or, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (n-k)\frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{(n-k-1)!} a_n(x-a)^{n-k-1},$$

et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\frac{(n+1+k)!}{(n+1)!} a_{n+1+k}(x-a)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+k+1)!}{n!} a_{n+k+1}(x-a)^n,$$

de sorte que la $(k+1)$ième dérivée de la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est la fonction somme de

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{(n-k-1)!} a_n(x-a)^{n-k-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+k+1)!}{n!} a_{n+k+1}(x-a)^n.$$

La série entière précédente étant la série dérivée d'une série entière dont le rayon de convergence est R, d'après le théorème 3.12, elle a elle-même rayon de convergence R et sa fonction somme est dérivable. □

Le corollaire 3.13 signifie que pour dériver $k \in \mathbb{N}$ fois la fonction somme d'une série entière, il faut dériver k fois sous le signe somme. En effet, en notant la fonction somme d'une série entière par la série entière elle-même, la conclusion s'écrit :

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(x-a)^{n-k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}(x-a)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d^k}{dx^k}\big(a_n(x-a)^n\big).$$

Une série entière est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de convergence. Cependant, il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert mais qui ne sont pas la fonction somme d'une série entière. On verra un contre-exemple dans la section 4.2.

On termine ce chapitre par l'intégration de la fonction somme d'une série entière. Puisque la dérivée de la fonction somme d'une série entière est obtenue en dérivant sous le signe somme, cette fonction admet également une primitive en intégrant sous le signe somme. On appelle ainsi une *série primitive* d'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$, tout série entière de la forme

$$c + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.14. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ une série entière de rayon de convergence R. Le rayon de convergence des séries primitives de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ vaut également R. De plus, la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ admet des primitives sur $I(a,R)$, qui sont les fonctions sommes de ses séries primitives.*

Démonstration. Le résultat découle du théorème 3.12 : la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est la série dérivée de n'importe laquelle de ses séries primitives, elles ont donc le même rayon de convergence R, et la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est la dérivée des fonctions sommes de ses séries primitives. □

Chapitre 4 :

Fonctions analytiques réelles

Dans ce chapitre, on définit les fonctions analytiques réelles. Dans la première section, on montre certaines propriétés de celles-ci et dans la deuxième section on introduit les formules de Taylor, à partir desquelles on déduit que les fonctions exponentielle et trigonométriques hyperboliques et circulaires sont analytiques.

Comme précédemment, on considère des fonctions définies sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et les résultats qu'on présente peuvent être adaptés à des fonctions analytiques complexes définies sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Cependant, comme on le verra à la fin de la première section, ces dernières sont plus riches que les réelles. On ne définira pas formellement les fonctions analytiques complexes, qui, informellement, sont des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{C}$ telles qu'en chaque point de cet ouvert elles soient la fonction somme d'une série entière de la variable complexe. De plus, puisqu'on ne parle pas de fonctions analytiques complexes, on parlera simplement de fonctions analytiques sans spécifier l'adjectif "réelles".

4.1. Définition et propriétés

Dans cette section, on introduit les fonctions analytiques, définies comme étant des fonctions étant localement somme d'une série entière de rayon de convergence non nulle. On montre ensuite différentes propriétés des fonctions analytiques : qu'elles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, que les coefficients de la série entière dont elles sont localement la somme sont donnés par ses dérivées, puis les principes du prolongement analytique et des zéros isolés. Enfin, on énonce différentes propriétés des fonctions analytiques complexes qui ne sont pas vraies pour les fonctions analytiques réelles.

Définition 4.1. Soient $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction et $a \in I$.

1). On dit que f est *analytique en a* s'il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ de rayon de convergence non nul $R \neq 0$ telle que f soit la fonction somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ sur un intervalle $I' \subseteq I(a,R) \cap I$.

2). On dit que f est *analytique sur I* si elle est analytique en tout point de I.

3). Si f est analytique sur I, la série entière de centre a dont f est la fonction somme au voisinage de a est appelée le *développement en série entière de f en a.*

Comme précédemment, on note $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ un série entière et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$ la série numérique obtenue par évaluation de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ en $x_0 \in I$. De plus, étant donnée une fonction $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, on note $f(x)$ son évaluation en un point $x \in I$, sauf quand cette fonction est analytique en un point $a \in I$ et qu'on donne son résultat par évaluation de son développement en série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ en un point $x_0 \in I$, auquel cas on note $f(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n$.

Les exemples les plus simples de fonctions analytiques sont les fonctions polynomiales, qui sont analytiques sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence non nul est analytique sur l'intervalle de convergence de la série entière. Pour démontrer ce résultat, on admet le théorème de Fubini : si $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifie que la série double $\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} f(k,n)$ converge absolument, *i.e.*, $\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|f(k,n)\right| < \infty$, alors les séries doubles $\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} f(k,n)$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} f(k,n)$ convergent et ont la même limite.

Proposition 4.2. *La fonction somme d'une série entière de rayon de convergence non nul est analytique sur l'intervalle de convergence de la série entière.*

Démonstration. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, S^f sa fonction somme et $b, x_0 \in I(a,R)$. On considère la fonction $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par : pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on a

$$f(k,n) = \begin{cases} a_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k}(x_0-b)^k, & \text{si} \quad k \le n \\ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $S^f(x_0)$ est égal à

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x_0-a)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n((x_0-b)+(b-a))^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k}(x_0-b)^k\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k,n).$$

Soit x_0 tel que $|x_0-b| < R - |b-a|$, qui appartient à $I(a,R)$ car on a $|x_0-a| \le |x_0-b| + |b-a| < R$. On pose $x_1 = |x_0-b|+|b-a|+a$, de sorte que $x_1 \in I(a,R)$, car on a $|x_1-a| = |x_0-b|+|b-a| < R$, et alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ converge absolument en x_1. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|f(k,n)\right| &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} |b-a|^{n-k}|x_0-b|^k\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \left(|x_0-b|+|b-a|\right)^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \, |x_1-a|^n < \infty. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, les séries doubles $\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} f(k,n)$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} f(k,n)$ convergent, et

$$S^f(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k,n) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} f(k,n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\ge k} a_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k}\right)(x_0-a)^k.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\ge k} a_n\binom{n}{k}(b-a)^{n-k}$ ne dépend pas de x_0, donc S^f est analytique en b. Puisque b a été choisi arbitrairement sur $I(a,R)$, on en déduit que S^f est analytique sur cet intervalle. □

On se donne une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ de rayon de convergence R et de fonction somme S^f ainsi que $b \in I(a,R)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$b_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(S^f\right)(b) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_n (b-a)^{n-k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k},$$

où la deuxième égalité découle du corollaire 3.13 et la dernière de la définition du coefficient binomial. On rappelle que par convention $n!/(n-k)! = 0$ si $n<k$, si bien qu'en reprenant les notations de la démonstration de la proposition 4.2, le développement en série entière de S^f en b est donné par

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k(x-b)^k = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(x-b)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(S^f\right)(b)\right)(x-b)^n. \tag{4.1}$$

On verra dans la proposition 4.6 que la formule (4.1) est vraie pour n'importe quelle fonction analytique, et pas seulement la fonction somme d'une série entière.

Voici un exemple de fonction analytique sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas globalement la fonction somme d'une série entière dont le rayon de convergence est infini.

Exemple 4.3. On considère sur $I = \mathbb{R}$ la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 1/\left(1+x^2\right)$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{1+(a+(x-a))^2} = \frac{1}{1+a^2+2a(x-a)+(x-a)^2},$$

et donc, en factorisant $1+a^2 = 1/f(a)$ au dénominateur, on a

$$f(x) = \frac{1}{1/f(a)} \times \frac{1}{1+2af(a)(x-a)+f(a)(x-a)^2} = \frac{f(a)}{1+2af(a)(x-a)+f(a)(x-a)^2}.$$

Or, on a

$$2af(a)(x-a)+f(a)(x-a)^2 = f(a)(x-a)(2a+x-a) = f(a)(x-a)(x+a) = f(a)\left(x^2-a^2\right),$$

et donc

$$f(x) = \frac{f(a)}{1+f(a)\left(x^2-a^2\right)}.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $-\sqrt{1+2a^2} < x_0 < \sqrt{1+2a^2}$, *i.e.*, $x_0^2 < 1+2a^2$. Alors, on a $\left|f(a)\left(x_0^2-a^2\right)\right| < 1$ grâce aux équivalences suivantes :

$$x_0^2 < 1+2a^2 \Leftrightarrow \left(x_0^2-a^2 < 1+a^2 \text{ et } -1-a^2 < a^2-x_0^2\right) \Leftrightarrow \left|x_0^2-a^2\right| < 1+a^2 = \frac{1}{f(a)} \Leftrightarrow \left|f(a)\left(x_0^2-a^2\right)\right| < 1.$$

Ainsi, la fonction f est analytique sur $\mathbb{R}$ car en tout $a \in \mathbb{R}$ elle est la fonction somme d'une série entière sur l'intervalle $I(a,\sqrt{1+2a^2})$; en effet, on a

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(a) \times \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(f(a)\left(x_0^2-a^2\right)\right)^n \\
&= f(a) \times \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \left(2af(a)(x_0-a)+f(a)(x_0-a)^2\right)^n \\
&= f(a) \times \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n f(a)^n \left(2a+(x_0-a)\right)^n (x_0-a)^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n f(a)^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2a)^{n-k}(x_0-a)^k\right)(x_0-a)^n \\
&= \sum_{n\geq k} (-1)^n f(a)^{n+1} (2a)^{n-k} \binom{n}{k} (x_0-a)^{n+k}.
\end{aligned}$$

Remarque 4.4. Comme annoncé, la fonction de l'exemple 4.3, bien qu'étant définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas globalement la fonction somme d'une série entière, puisqu'en tout $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence du développement en série entière de f en a est le nombre fini $\sqrt{1+2a^2}$. Cette situation n'est pas possible pour les fonctions analytiques complexes : si une fonction analytique complexe f est définie sur un disque ouvert centré $a \in \mathbb{C}$, alors la restriction de f à ce disque est la fonction somme du développement en série entière de f en a. En note que dans notre exemple, le problème vient du fait que l'extension complexe de f, définie par $f(z) = 1/\left(1+z^2\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$, n'est pas définie en $\pm i$. Ainsi, le plus grand disque centré en 0 sur lequel f est définie a pour rayon 1, ce qui est cohérent avec ce qu'on a vu, puisque pour $a = 0$, le rayon de convergence du développement en série entière de f en 0 est $\sqrt{1+0^2} = 1$.

On énonce maintenant quelques propriétés remarquables des fonctions analytiques. Pour commencer, on montre qu'une fonction analytique sur I est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Proposition 4.5. *Une fonction analytique $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

Démonstration. Soient $a \in I$ et $I' \subseteq I$ un intervalle contenant a tel que f est la fonction somme d'une série entière sur I'. La fonction somme d'une série entière étant infiniment dérivable sur son intervalle de convergence d'après le corollaire 3.13, f est infiniment dérivable sur I'. Ainsi, f est infiniment dérivable au voisinage de tout point de I et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle. $\square$

Maintenant, on généralise la formule (4.1) à une fonction analytique quelconque. Pour cela, étant donnée une fonction n fois dérivable f, on note $f^{(n)}$ sa dérivée $n$ième.

Proposition 4.6. *Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction analytique sur I. Alors, le développement en série entière de la fonction f en $a \in I$ est donné par :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Démonstration. Soit $I' \subseteq I$ un intervalle contenant a tel que sur f est la fonction somme d'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ sur I'. D'après le corollaire 3.13, la dérivée $n$ième de f sur I' est la fonction somme de la série entière

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-a)^{k-n} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n}(x-a)^k.$$

En évaluant cette expression en a, on en déduit que $f^{(n)}(a) = (0+n)!/0!a_{0+n}$, *i.e.*, on a $f^{(n)}(a) = (n!)a_n$, et donc $a_n = (1/n!)f^{(n)}(a)$, ce qui montre le résultat. $\square$

D'après la proposition 4.5, une fonction analytique est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. On va montrer grâce à la proposition 4.6 que la réciproque est fausse. Par exemple, si on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors, la fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $p_k(x) \in \mathbb{R}[x]$ de degré inférieur à k tel que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{p_k(x)}{x^{2k}} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2}$$

En effet, la formule est vraie pour $k = 0$, avec p_k le polynôme constant égal à 1. En supposant que la fonction f est $k \in \mathbb{N}$ fois dérivable et que l'expression de sa dérivée $k$ième est donnée par (4.2), alors la fonction $f^{(k)}$ est continue en 0 car $e^{-1/x}/x^{2k} \to f(0) = 0$ quand $x \to 0$. Elle est dérivable pour tout $x \neq 0$, avec $f^{(k+1)}(x) = 0$ pour $x < 0$, et pour tout $x > 0$, on a

$$f^{(k+1)}(x) = \left(\frac{p_k'(x)x^{2k} - 2kx^{2k-1}p_k(x)}{\left(x^{2k}\right)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{p_k(x)}{x^{2k}} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{p_k'(x)x^{2k} - 2kx^{2k-1}p_k(x)}{x^{4k}} + \frac{p_k(x)}{x^{2k+2}} \right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Ainsi, en définissant $p_{k+1}(x) \in \mathbb{R}[x]$ par $p_{k+1}(x) = x^2 p_k'(x) + (1-2kx)p_k(x)$, qui est degré inférieur à $k+1$, pour tout $x > 0$, on a

$$f^{(k+1)}(x) = \left(\frac{p_k'(x) - (2k/x)p_k(x)}{x^{2k}} + \frac{p_k(x)}{x^{2k+2}} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2 p_k'(x) + (1-2kx)p_k(x)}{x^{2k+2}} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{p_{k+1}(x)}{x^{2(k+1)}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Enfin, $f^{(k)}$ est dérivable en $x=0$ avec $f^{(k+1)}(0)=0$, car pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{f^{(k)}(h)-f^{(k)}(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{p_k(h)e^{-\frac{1}{h}}}{h^{2k+1}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0, & \text{si} \quad h>0 \\ \\ 0, & \text{si} \quad h<0, \end{cases}$$

et $e^{-1/h}h^{2k+1} \to 0$ quand $h \to 0$. On a donc montré que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; cependant elle n'est pas analytique sur $\mathbb{R}$. En effet, si elle l'était, puisque toutes ses dérivées s'annulent en 0, d'après la proposition 4.6, elle serait la fonction somme de la série entière dont tous les coefficients sont nuls, de sorte que f serait la fonction identiquement nulle au voisinage de 0. Or, pour tout $x>0$, on $f(x) \neq 0$, ce qui montre que f n'est pas analytique en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

On présente maintenant deux propriétés des fonctions analytiques : les principes du prolongement analytique et des zéros isolés. Pour cela, on fait quelques rappels de topologie.

1). On dit que $U \subseteq I$ est un *ouvert* de I si pour tout $a \in U$, il existe un intervalle ouvert I' contenant a et inclus dans U. On dit que $F \subseteq I$ est un *fermé* de I si son complémentaire dans I est un ouvert de I.

2). Une intersection quelconque de fermés de I est un fermé de I.

3). Un singleton est fermé dans I.

4). L'intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est *connexe*, ce qui signifie que la seule partie non vide de I qui soit à la fois un ouvert et un fermé de I est I lui-même.

5). Étant donnée une application continue $f : I \to \mathbb{R}$, les pré-images par f des fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés de I.

6). Étant donnés $a \in I$ et une partie $A \subset I$, on dit que a est un *point d'accumulation* de A si $a \notin A$ et s'il existe une suite numérique $(a_n)_n \subseteq A$ telle que $a_n \to a$ quand $n \to \infty$.

Enfin, dans la démonstration du théorème 4.7 et dans la remarque 4.9, on emploie la terminologie suivante : on dit qu'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-a)^n$ est identiquement nulle ou identiquement une constante $\lambda \in \mathbb{R}$, si on a $a_0 = 0$ ou λ, respectivement, et si pour tout $n \geq 1$, on a $a_n = 0$.

Théorème 4.7 (Principe du prolongement analytique)**.** *Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction analytique sur I. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1). la fonction f est identiquement nulle sur I,

2). la fonction f est identiquement nulle sur une partie de I possédant un point d'accumulation,

3). il existe $a \in I$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$.

Démonstration. L'implication 1). ⇒ 2). est claire. Pour l'implication 2). ⇒ 3)., on prend $A \subset I$ une partie sur laquelle f s'annule, $a \in I \setminus A$ un point d'accumulation de A et une suite $(a_k)_k \subseteq A$ tendant vers a, et on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, puisque f s'annule sur A et que $a_k \in A$, on a $f(a_k) = 0$ et donc $f(a_k) \to 0$ quand $k \to \infty$; de plus, par continuité de f, la suite $\big(f(a_k)\big)_k$ tend vers $f(a)$, ce qui montre que $f(a) = 0$. On suppose maintenant que les dérivées d'ordre inférieur à n de f s'annulent en a. D'après proposition 4.6, le développement en série entière de f en a est donné par

$$\sum_{m\geq n+1} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m = (x-a)^{n+1} \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{f^{(m+n+1)}(a)}{(m+n+1)!}(x-a)^m. \tag{4.3}$$

Soient $I' \subseteq I$ un intervalle sur lequel f est la fonction somme de la série entière (4.3) et g la fonction somme de la série entière $\sum_{m\in\mathbb{N}} f^{(m+n+1)}(a)/(m+n+1)!(x-a)^m$. Ainsi, on a $g(a) = f^{(n+1)}(a)/(n!)$ et pour tout $x \in I'$, on a $f(x) = (x-a)^{n+1}g(x)$. Si $f^{(n+1)}(a)$ était non nul, alors $g(a)$ serait non nul et donc, g

étant continue d'après la proposition 3.11, elle ne s'annulerait pas au voisinage de a. Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on aurait $g(a_k) \neq 0$; or, on a $0 = f(a_k) = (a_k - a)^n g(a_k)$, et donc $a_k - a = 0$, ce qui contredit le fait que $a_k \in A$ et $a \notin A$. Ainsi, on a $f^{(n+1)}(a) = 0$. Pour l'implication 3). ⇒ 1)., on suppose qu'il existe $a \in I$ tel que toutes les dérivées de f s'annulent en a, et on note :

$$A = \left\{b \in I,\ \forall n \in \mathbb{N} :\ f^{(n)}(b) = 0\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(f^{(n)}\right)^{-}(0).$$

On a $a \in A$ et donc A est non vide. De plus, A est l'intersection de pré-images de fermés par les fonctions dérivées d'une fonction analytique, qui sont continues d'après la proposition 4.5, donc A est fermé. Enfin, d'après la proposition 4.6, étant donné $b \in A$, le développement en série entière de f en b est donné par

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n.$$

Par définition de A, puisque $b \in A$, toutes les dérivées de f en b s'annulent, donc le développement en série entière de f en b est identiquement nul. Or, f étant sur un intervalle $I' \subseteq I$ contenant b la fonction somme de sa série entière en b, elle est la fonction identiquement nulle sur I', donc pour tout $b' \in I'$, toutes les dérivées de f en b' s'annulent. On a donc montré que pour tout $b \in A$, il existe un intervalle I' contenant b et inclus dans A, *i.e.*, A est ouvert; et puisque c'est un fermé non vide et que I est connexe, on a $A = I$. Ainsi, en tout point de I, f est la fonction somme de la série entière identiquement nulle, de sorte que f est la fonction identiquement nulle sur I. □

Le dernier résultat de cette section est le principe des zéros isolés.

Théorème 4.8 (Principe des zéros isolés)**.** *Soient $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction analytique non identiquement nulle et $a \in I$ tel que $f(a) = 0$. Il existe un intervalle $I' \subseteq I$ contenant a tel que f ne s'annule pas sur $I' \setminus \{a\}$.*

Démonstration. Puisque $f(a) = 0$ et que f n'est pas identiquement nulle, d'après le théorème 4.7, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \leq n_0$, on a $f^{(n)}(a) = 0$ et $f^{(n_0+1)}(a) \neq 0$. Ainsi, d'après la proposition 4.6, le développement en série entière de f en a est donné par

$$\sum_{n\geq n_0+1} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = (x-a)^{n_0+1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n+n_0+1)}(a)}{(n+n_0+1)!}(x-a)^n.$$

En notant $I' \subseteq I$ l'intervalle sur lequel f est la fonction somme de son développement en série entière au point a et $g \in \mathscr{F}(I',\mathbb{R})$ la fonction somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(f^{(n+n_0+1)}(a)/(n+n_0+1)!\right)(x-a)^n$, on a

$$g(a) = \frac{f^{n_0+1}(a)}{(n_0+1)!} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = (x-a)^{n_0} g(x), \tag{4.4}$$

pour tout $x \in I'$. La fonction somme d'une série entière étant continue d'après la proposition 3.11, la première égalité de (4.4) implique qu'il existe un intervalle $I'' \subseteq I'$ contenant a tel que g ne s'annule pas sur I''. Ainsi, d'après la deuxième équation de (4.4), le seul point de I'' en lequel f s'annule est a. □

Remarque 4.9. Les remarques suivantes portent sur le prolongement analytique et les zéros isolés.

1). Le principe du prolongement analytique permet de prolonger une fonction analytique sur un intervalle en une fonction analytique sur un intervalle plus grand, ce qui justifie la terminologie. En effet, soient $I \subseteq I'$ des intervalles, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}(I',\mathbb{R})$ des fonctions analytiques et $A \subseteq I$ une partie admettant un point d'accumulation tels que $f = g$ sur A. Alors, la fonction $f-g$ est analytique sur l'intervalle I, car admettant en tout point le développement en série entière différence des développements en séries entières de f et g en ce point. Ainsi, d'après le principe du prolongement analytique, puisque $f - g$ s'annule sur une partie de I admettant un point d'accumulation, il s'agit de la fonction identiquement nulle sur I, *i.e.*, on a $f = g$ sur I et donc on peut prolonger f à I' en posant $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I'$.

2). Soient $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction analytique, $a \in I$ et $I' \subseteq I(a,R) \cap I$ un intervalle sur lequel f est la fonction somme d'une série entière de rayon R. Les restrictions de f aux intervalles I' et $I(a,R)$ coïncident sur $I' \cap I(a,R)$, donc d'après le principe du prolongement analytique, elles coïncident sur $(I' \cup I(a,R)) \cap I$. Or, $I(a,R)$ est le plus grand intervalle sur lequel la fonction somme du développement en série entière de f en a est défini, de sorte qu'on $I' \subseteq I(a,R)$. Ainsi, f est en fait la fonction somme de son développement en série entière sur $I(a,R) \cap I$, si bien que dans la définition de l'analycité de f en a, on aurait pu prendre $I' = I(a,R) \cap I$.

3). La terminologie du principe des zéros isolés provient du fait que celui-ci signifie qu'on peut isoler les zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle, dans le sens où on peut restreindre l'intervalle de définition à un intervalle contenant un unique zéro, pour chacun de ceux-ci.

4). La définition de fonction analytique sur un intervalle ouvert s'étend à la définition d'une fonction analytique sur un ouvert de $\mathbb{R}$, en spécifiant que la fonction est développable en série entière en chaque point de l'ouvert. Cependant, pour que le principe du prolongement analytique soit vrai, on doit considérer des fonctions analytiques sur un intervalle afin que l'argument de connexité permettant de montrer l'implication 3). $\Rightarrow$ 1). soit valide. Un contre-exemple pour une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$ est donné par

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} = I_- \cup I_+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0, \\ \\ 1, & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

où $I_\mp$ est l'ensemble des réels strictement négatifs ou positifs selon le signe de l'indice. Ainsi définie, la fonction f est analytique, car admettant en $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ le développement en série entière identiquement nul ou identiquement 1, selon que $a < 0$ ou $a > 0$. Or, en tout $a > 0$, toutes les dérivées de f s'annulent sans que la fonction f soit identiquement nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5). Les principes du prolongement analytique et des zéros isolés ne sont pas vrais si on considère des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, car sinon l'argument faisant appel au développement en série entière ne serait pas valide. On considère de nouveau le contre-exemple de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a vu après la proposition 4.6 que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Or, elle est identiquement nulle sur l'ensemble des $x < 0$, qui ne sont donc pas des zéros isolés, de plus cet ensemble possède le point d'accumulation 0, et pourtant f n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

On finit cette section en énonçant différentes propriétés qui sont vraies pour les fonctions analytiques complexes mais qui ne le sont pas pour les fonctions analytiques réelles. Ces remarques illustrent que bien que les fonctions analytiques réelles aient déjà de très riches propriétés, les fonctions analytiques complexes sont encore plus riches.

1). Comme on l'a vu dans la remarque 4.4, si une fonction analytique complexe f est définie sur un disque ouvert centré $a \in \mathbb{C}$, alors la restriction de f à ce disque est la fonction somme du développement en série entière de f en a, ce qui n'est pas vrai pour les fonctions analytiques réelles définies sur un intervalle ouvert centré en un point.

2). Pour qu'une fonction complexe soit analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}$, il suffit qu'elle soit dérivable sur cet ouvert. Cela n'est pas vrai en réels, car on a vu qu'il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert mais qui n'y sont pas analytiques.

3). Le principe du maximum signifie que si une fonction analytique complexe admet une extremum local à l'intérieur d'un ouvert de $\mathbb{C}$, alors elle est constante sur cet ouvert. Ce résultat n'est pas vrai en réels : on a vu que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1/\left(1+x^2\right)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, est analytique sur $\mathbb{R}$, elle admet un maximum local (et même global) en $x=0$ car on a $f(0)=1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $1+x^2\geq 1$ et donc $f(x)\leq 1$, et pourtant cette fonction n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

4). Le théorème de Liouville stipule que si une fonction est analytique sur $\mathbb{C}$ et a un module borné, alors cette fonction est constante. Là encore, le résultat n'est pas vrai en réels : on reprend $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1/\left(1+x^2\right)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$. On a vu que cette fonction est analytique sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x)\leq 1$; de plus, puisque $1+x^2\geq 0$, on a $f(x)\geq 0$. Ainsi, on a $\left|f(x)\right|\leq 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc la valeur absolue de f est bornée et pourtant f n'est pas constante. On note que l'extension complexe de cette fonction est définie par $f(z)=1/\left(1+z^2\right)$ pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$. Ainsi, cette fonction n'est pas analytique sur $\mathbb{C}$ et donc le théorème de Liouville ne s'applique pas. D'autres contre-exemples sont donnés par les fonctions cos et sin : on verra dans la prochaine section qu'elles sont analytiques sur $\mathbb{R}$, elles sont de valeurs absolues bornées mais non constantes.

5). Une fonction analytique complexe est localement inversible en un point si et seulement si sa dérivée en ce point est non nulle. En réels, si une fonction a une dérivée non nulle en un point, alors elle est inversible localement autour de ce point. En revanche, la réciproque est fausse : la fonction définie par $f(x)=x^3$ est globalement inversible, donc en particulier localement en 0, pourtant sa dérivée en 0 s'annule.

4.2. Formules de Taylor

Dans cette section, on introduit les formules de Taylor, permettant d'approximer une fonction par une fonction polynomiale, appelée polynôme de Taylor. On en déduira que les fonctions exponentielle et trigonométriques hyperboliques et circulaires sont analytiques sur $\mathbb{R}$.

Définition 4.10. Soient $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $a\in I$ tels que f est $n\in\mathbb{N}$ fois dérivable en a. Le *polynôme de Taylor d'ordre n de f en a* est la fonction polynomiale p_n définie par : pour tout $x\in I$, on a

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a).$$

La fonction $R_n\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ définie par $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$, s'appelle le *reste de Taylor d'ordre n de f en a.*

Soient $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $a\in I$. Dans la proposition 4.6, on a vu que si f est analytique sur I, alors les coefficients de son développement en série entière en a sont donnés par ses dérivées en ce point. Ce développement peut ainsi être pensé comme étant un polynôme de Taylor d'ordre infini. De plus, on note que pour tout $k\leq n$, on a $f^{(k)}(a)=p_n^{(k)}(a)$, et on a verra que les formules de Taylor stipulent qu'au voisinage de a, la fonction f est égale à son polynôme de Taylor plus une quantité négligeable. Ces deux remarques justifient le fait que le polynôme de Taylor est une approximation d'ordre n de la fonction initiale. Par ailleurs, pour $n=1$, le polynôme de Taylor vérifie $p_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$, pour tout $x\in I$, ce qui est l'équation de la tangente au graphe de f en a ; donc la fonction p_1 est bien une approximation linéaire de f. Enfin, pour $n=2$, le polynôme de Taylor vérifie $p_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2$, pour tout $x\in I$, une telle approximation étant dite quadratique, car d'ordre 2.

Dans les trois formules de Taylor, on fixera une fonction $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ ayant une certaine régularité, à savoir $\mathscr{C}^{n-1}$ et n fois dérivable ou $\mathscr{C}^{n}$ et $n+1$ fois dérivable ou $\mathscr{C}^{n+1}$, où n est un entier. On notera p_n le polynôme de Taylor de f d'ordre n en un point $a\in I$, qui sera également fixé. La première formule de Taylor est la formule de Taylor-Young. Dans son énoncé et sa démonstration, on emploie la convention que pour $n=0$, une fonction de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et n fois dérivable est une fonction continue.

Théorème 4.11 (Taylor-Young)**.** *Soient $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et n fois dérivable sur I et $a \in I$. Il existe une fonction $\varepsilon \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ telle que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$ et pour tout $x \in I$, on a*

$$f(x) = p_n(x) + \varepsilon(x)(x-a)^n. \tag{4.5}$$

Démonstration. Pour $n = 0$, on définit $\varepsilon \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ par : pour tout $x \in I$, on a $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$. En particulier, f étant continue, on a $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$, ce qui montre la formule de Taylor-Young d'ordre $n = 0$. Pour $n = 1$, la fonction est dérivable sur I et donc en a, et on définit $\varepsilon \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ par

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & \text{si} \quad x \neq a \\ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque la définition de $\varepsilon(x)$ pour $x \neq a$ n'est rien d'autre que la différence entre le taux d'accroissement définissant la dérivée en a et cette dérivée elle-même, on a $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$. De plus, on a

$$f(a) = f(a) + f'(a)(a-a) + 0(a-a) = p_1(a) + \varepsilon(a)(a-a),$$

ce qui montre que la formule (4.5) est vraie à l'ordre 1 en $x = a$. De plus, si $x \neq a$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \big(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\big) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right)(x-a) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \\ &= p_1(x) + \varepsilon(x)(x-a), \end{aligned}$$

ce qui montre que la formule (4.5) est vraie à l'ordre 1 en $x \neq a$. On suppose maintenant que $n \geq 1$, que la formule (4.5) est vraie jusqu'à l'ordre n et on fixe f de classe $\mathscr{C}^n$ et $n+1$ fois dérivable sur I. En particulier, f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et n fois dérivable, donc par hypothèse de récurrence, il existe une fonction $\varepsilon_0 \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ telle que $\varepsilon_0(x) \to 0$ quand $x \to a$ et pour tout $x \in I$, en notant $\tilde{p}_n$ le polynôme de Taylor de f' d'ordre n en a, on a

$$f'(x) = \tilde{p}_n(x) + \varepsilon_0(x)(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(f'\right)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \varepsilon_0(x)(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + \varepsilon_0(x)(x-a)^n.$$

Puisque $n \geq 1$ et que f est de classe $\mathscr{C}^n$, la fonction f' est continue, de sorte que la fonction qui à $x \in I$ associe $\varepsilon_0(x)(x-a)^n = f'(x) - \tilde{p}_n(x)$ est continue en tant que différence de fonctions continues. Après avoir renommer les x et t, on peut donc intégrer l'égalité précédente entre a et x pour avoir

$$f(x) - f(a) = \big[f(t)\big]_a^x = \int_a^x f'(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_a^x \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(t-a)^k\,dt + \int_a^x \varepsilon_0(t)(t-a)^n\,dt,$$

et donc, on a

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\left[\frac{(t-a)^{k+1}}{k+1}\right]_a^x + \int_a^x \varepsilon_0(t)(t-a)^n\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \int_a^{x_0} \varepsilon_0(t)(t-a)^n\,dt \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \varepsilon_0(t)(t-a)^n\,dt, \end{aligned}$$

soit encore

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x \varepsilon_0(t)(t-a)^n dt = p_{n+1}(x)+\int_a^x \varepsilon_0(t)(t-a)^n dt. \tag{4.6}$$

Maintenant, on définit $\varepsilon \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ par

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}}\displaystyle\int_a^x \varepsilon_0(t)(t-a)^n dt, & \text{si} \quad x\neq a\\[2ex] 0, \quad \text{sinon.}\end{cases}$$

Puisqu'on a $\varepsilon_0(x)\to 0$ quand $x\to a$, pour tout $\eta>0$, il existe un intervalle $I'\subseteq I$ contenant a tel que pour tout $x\in I'$, on a $|\varepsilon_0(x)|\leq \eta$. Ainsi, pour $x\in I'\setminus\{a\}$, on a

$$|\varepsilon(x)|\leq \pm\frac{\eta}{(x-a)^{n+1}}\int_a^x (t-a)^n dt = \pm\frac{\eta}{(x-a)^{n+1}}\left[\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x=\pm\frac{\eta}{n+1},$$

le signe $\pm$ dépendant de $x>a$ ou $x<a$ ainsi que de la parité de n. On a donc montré que pour x suffisamment proche de a, on a $|\varepsilon(x)|\leq \eta/(n+1)$ ce qui montre que $\varepsilon(x)\to 0$ quand $x\to a$. De plus, on a $f(a)=p_{n+1}(a)$ et $\varepsilon(a)=0$, et donc $f(a)=p_{n+1}(a)+0=p_{n+1}(a)+\varepsilon(a)(a-a)^{n+1}$, ce qui montre que la formule (4.5) est vraie à l'ordre $n+1$ en $x=a$. Si $x\neq a$, d'après (4.6), on a

$$f(x)=p_{n+1}(x)+\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int_a^x \varepsilon_0(t)(t-a)^n dt\right)(x-a)^{n+1}=p_{n+1}(x)+\varepsilon(x)(x-a)^{n+1},$$

ce qui montre que la formule (4.5) est vraie à l'ordre $n+1$ en $x\neq a$. □

La formule de Taylor-Young ne donne pas de forme explicite pour le reste de Taylor. La prochaine formule de Taylor, dite de Taylor-Lagrange, permet, sous des hypothèses plus fortes que pour la formule de Taylor-Young, d'avoir une description du reste grâce au théorème de Roll. On rappelle que celui-ci stipule qu'étant donnés $a<b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b), telle que $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in(a,b)$ tel que $f'(c)=0$.

Théorème 4.12 (Taylor-Lagrange)**.** *Soient $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $n+1$ fois dérivable sur I et $a\in I$. Alors, pour tout $x\in I\setminus\{a\}$, il existe c compris entre a et x tel que*

$$f(x)=p_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{4.7}$$

Démonstration. Puisque $x\neq a$, on a $x-a\neq 0$, et on définit $A\in\mathbb{R}$ par

$$A=\frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}\big(f(x)-p_n(x)\big) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{A}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=f(x)-p_n(x).$$

De plus, on considère la fonction $\varphi: I\to\mathbb{R}$ définie par : pour tout $y\in I$, on a

$$\varphi(y)=f(x)-f(y)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k-\frac{A}{(n+1)!}(x-y)^{n+1}.$$

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^n$ et $n+1$ fois dérivable sur I, φ est continue sur l'intervalle $[x,a]$ et dérivable sur (x,a), ou continue sur $[a,x]$ et dérivable sur (a,x) selon que $x<a$ ou $a<x$. De plus, on a

$$\varphi(x)=0=-\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}A+f(x)-p_n(x)=f(x)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k-\frac{A}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=\varphi(a).$$

D'après le théorème de Roll, il existe c dans (x,a) ou (a,x) selon que $x<a$ ou $a<x$, *i.e.*, c est compris entre a et x, tel que $\varphi'(c)=0$. Or, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(c) &= -f'(c) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k - \frac{f^{(k)}(c)}{k!}k(x-c)^{k-1}\right) - \frac{A}{(n+1)!}\left(-(n+1)(x-c)^n\right)\\
&= -f'(c) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(x-c)^{k-1} + \frac{A}{n!}(x-c)^n\\
&= -f'(c) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{A}{n!}(x-c)^n\\
&= -f'(c) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + f'(c) + \frac{A}{n!}(x-c)^n\\
&= \frac{(x-c)^n}{n!}\left(A - f^{(n+1)}(c)\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\varphi'(c)=0$, on a $A=f^{(n+1)}(c)$, ce qui donne le résultat, car par définition de A, on a

$$f^{(n+1)}(c) = A = \frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}\left(f(x)-p_n(x)\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$\square$

La formule de Taylor-Lagrange, bien que donnant une description explicite du reste, dépend d'un nombre, qu'on a noté c, dont on peut uniquement garantir l'existence grâce au théorème de Roll. La formule de Taylor avec reste intégrale permet, sous des hypothèses plus fortes que pour la formule de Taylor-Lagrange, d'avoir une description du reste ne dépendant que de la fonction et du point en lesquels est exprimé le développement de Taylor.

Théorème 4.13 (Taylor avec reste intégrale)**.** *Soient $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et $a\in I$. Alors, pour tout $x\in I$, on a*

$$f(x) = p_n(x) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{4.8}$$

Démonstration. La formule est vraie si $n=0$ car on a $p_0(x)=f(a)$, et donc

$$\frac{1}{0!}\int_a^x (x-t)^0 f^{(0+1)}(t)\,dt = \int_a^x f'(t)\,dt = \left[f(t)\right]_a^x = f(x)-f(a) = f(x)-p_0(x).$$

On suppose que la formule (4.8) est vraie à l'ordre n et que f est de classe $\mathscr{C}^{n+2}$ sur I, donc en particulier de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, de sorte que (4.8) est vraie par hypothèse de récurrence. Or, f étant de classe $\mathscr{C}^{n+2}$, on peut calculer l'intégrale de (4.8) par une intégration par partie : on pose $u(t)=f^{(n+1)}(t)$ et $v'(t)=(x-t)^n$, de sorte qu'on a $u'(t)=f^{(n+2)}(t)$ et $v(t)=-(x-t)^{n+1}/(n+1)$, et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt &= \frac{1}{n!}\left(-\left[f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt\right)\\
&= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

En reportant cette égalité dans (4.8) à l'ordre n, on obtient (4.8) à l'ordre $n+1$, car on a

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$$

$$= p_{n+1}(x) + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt.$$

□

Maintenant qu'on a démontré les formules de Taylor, avant d'en déduire l'analycité des fonctions exponentielle et trigonométriques hyperboliques et géométriques, on fait les remarques suivantes.

Remarque 4.14. Soient $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction, $a \in I$, n un ordre auquel on peut appliquer les formules de Taylor à f et p_n et R_n son polynôme et son reste de Taylor d'ordre n en a. Comme annoncé en début de section, les formules de Taylor permettent d'approximer f en a par p_n. Formellement, cela signifie que quand $x \to a$, alors $R_n(x)$ est négligeable devant $p_n(x)$. En effet :

1). c'est évident pour la formule de Taylor-Young puisque R_n est en fait un petit o,

2). pour la formule de Taylor-Lagrange, si on suppose dans les hypothèses que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, alors f^{n+1} étant continue, elle est bornée au voisinage de a ; ainsi, puisque le nombre c dans la formule est compris entre a et x, le reste de Taylor $R_n(x) = \left(f^{(n+1)}(c)/(n+1)!\right)(x-a)^{n+1}$ est majoré par une fonction de la forme $M(x-a)^{n+1}$, qui est une fonction polynomiale de degré $n+1$ et tend donc plus vite vers 0 que la fonction p_n quand $x \to a$,

3). La formule de Taylor avec reste intégrale donne le même type de conclusion, puisque par continuité de $f^{(n+1)}$, on peut majorer celle-ci dans l'intégrale, puis en intégrant $(x-a)^n$, on obtient que R_n est majoré par un fonction de la forme $M(x-a)^{n+1}$, qui tend plus vite vers 0 que p_n quand $x \to a$.

Maintenant, on va voir comment utiliser les formules de Taylor pour montrer l'analycité d'une fonction. La stratégie est la suivante : on se donne une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ dont on sait *a priori* qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et $a \in I$. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, on peut appliquer les formule de Taylor à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$ afin d'avoir, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

où R_n est le de Taylor d'ordre n de f en a. En cohérence avec la proposition 4.6, en faisant $n \to \infty$, cela donne comme candidat pour le développement en série entière de f en a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{4.9}$$

où les $f^{(n)}(a)$ sont déterminés de façon explicite à partir de f et de a. Pour montrer que la série entière (4.9) est bien le développement en série entière de f en a, on montre d'abord que son rayon de convergence est non nul puis que le reste de Taylor tend simplement vers la fonction identiquement nulle sur l'intervalle de convergence de (4.9).

On va mettre en place cette stratégie pour montrer que les fonctions exponentielle et trigonométriques circulaires sont analytiques sur $I = \mathbb{R}$, ce qui passera par montrer que le rayon de convergence de la série entière (4.9) est infini. À partir de l'analycité de la fonction exponentielle et du théorème 3.10, on montrera l'analycité sur $\mathbb{R}$ des fonctions trigonométriques hyperboliques. Avant cela, on fait quelques remarques.

Remarque 4.15. Dans les remarques suivantes, lorsqu'on mentionne une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, elle est supposée de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

1). Comme annoncé dans le paragraphe précédent, toutes nos fonctions seront de classe $\mathscr{C}^\infty$ *a priori* et donc on pourra exprimer leurs développements de Taylor à n'importe quel ordre. Cette remarque étant réécrite ici, on l'utilisera systématiquement sans la rappeler dans chacun de nos exemples.

2). On utilise soit la formule de Taylor-Lagrange soit la formule de Taylor avec reste intégrale car elles donnent une expression explicite du reste. On pourrait être tenté d'utiliser systématiquement la formule de Taylor-Lagrange, d'autant que comme on le verra quand on montrera l'analycité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^n/n! \to 0$ quand $n \to \infty$, et donc on pourrait penser que le reste de Taylor-Lagrange d'ordre n, donné par $R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\left(x^{n+1}/(n+1)!\right)$, tend simplement vers 0 quand $n \to \infty$. Cependant, le c dépend de x et de n et donc quand n grandit, il pourrait compenser la décroissance de $x^{n+1}/(n+1)!$. Cependant, si l'on sait *a priori* que les dérivées de f sont bornées, alors cet argument fonctionnera; on utilisera donc la formule de Taylor-Lagrange pour montrer l'analycité des fonctions trigonométriques circulaires, mais on utilisera la formule de Taylor avec reste intégrale pour montrer l'analycité de la fonction exponentielle.

3). Bien que les développements en séries entières des fonctions qu'on s'apprête à étudier aient un rayon de convergence infini, il n'y a *a priori* pas de raison que ce soit le cas pour n'importe quelle fonction analytique sur $\mathbb{R}$. La fonction de l'exemple 4.3, définie par $f(x) = 1/\left(1+x^2\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, illustre ce point; en effet, on a vu que le rayon de convergence de son développement en série entière en tout point est fini. La raison sous-jacente à cette observation est que le reste de Taylor est une quantité petite au voisinage du point où l'on effectue le développement, mais dès qu'on s'en éloigne, ce reste peut devenir dominant et ne pas converger simplement vers 0.

4). La stratégie pour montrer l'analycité présentée avant la remarque ne fonctionne pas pour une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ en général car son reste de Taylor n'a pas de raison de tendre simplement vers la fonction identiquement nulle sur un intervalle contenant le point $a \in I$ en lequel on fait le développement. Cela provient du fait que le développement de Taylor de f en donne une approximation en a alors que la fonction somme du développement en série entière d'une fonction analytique coïncide avec celle-ci sur un intervalle contenant a. Afin de préciser ce point, on reprend l'exemple suivant la proposition 4.6 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas analytique, définie par $f(x) = 0$ si $x \le 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$. Toutes les dérivées de f en 0 sont nulles, donc ses polynômes de Taylor en 0 sont tous nuls; cela donne bien le comportement de f en 0, car le graphe de f est très écrasé en ce point. Cependant, les polynômes de Taylor étant tous nuls, la suite de ces polynômes ne tend pas simplement vers f sur un intervalle contenant 0; ce qui revient à dire que le reste de Taylor de f, qui est constant égal à f, ne tend pas simplement vers 0.

Notre premier exemple est la fonction exponentielle, que l'on note f. Puisque f est sa propre dérivée et vaut 0 en 1, son polynôme de Taylor d'ordre n en 0 est la somme des $x^k/k!$, pour $0 \le k \le n$. Ainsi, la formule de Taylor avec reste intégrale (4.8) donne : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt. \tag{4.10}$$

Pour montrer que f est analytique sur $\mathbb{R}$, d'après la proposition 4.2, il suffit de montrer que f est la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence infini, la candidate donnée par (4.10) étant

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} x^n. \tag{4.11}$$

On commence par calculer le rayon de convergence de (4.11) : ses coefficients sont $a_n = 1/n!$, ils sont donc non nuls, et on a

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de sorte que le rayon de convergence est infini d'après le deuxième critère du théorème 3.7. Pour montrer que (4.11) est bien le développement en série entière de f en 0, il reste à montrer que le reste de Taylor R_n

d'ordre n de f en 0 tend simplement vers la fonction identiquement nulle. Or, selon que $x>0$ ou $x<0$ dans (4.10), l'exponentielle sous l'intégrale est majorée par e^x ou 1, donc en notant $M=\max(e^x,1)$, on a

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{n!}\int_0^x |x-t|^n\,dt = \pm\frac{M}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,dt = \pm\frac{M}{n!}\left[\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \pm\frac{M}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{4.12}$$

le signe $\pm$ dépendant de $x>0$ ou $x<0$ ainsi que de la parité de n. Or, puisque le rayon de convergence de la série entière (4.11) est infini, celle-ci converge simplement en tout $x_0 \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_0^n/n!$ converge. En particulier, son terme général $x_0^n/n!$ tend vers 0. Ainsi, d'après (4.12), on a $|R_n(x_0)| \leq \pm M\big(x_0^{n+1}/(n+1)!\big)$ et donc le reste de Taylor de f tend bien simplement vers 0, donc f est analytique sur $\mathbb{R}$, en tant que fonction somme de la série entière (4.11), de rayon de convergence infini.

À partir de ce qu'on vient de voir sur la fonction exponentielle, on montre l'analycité des fonctions trigonométriques comme fonctions sommes de séries entières de rayon de convergence infini. On commence par rappeler que les fonctions cosh et sinh sont définies par, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Or, puisque la fonction exponentielle est la fonction somme de (4.11), alors la fonction $\mathbb{R}\ni x\mapsto e^{-x}$ est la fonction somme de la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!}x^n. \tag{4.13}$$

Les coefficients de la série entière (4.13) sont $a_n = (-1)^n/n!$, ils sont donc non nuls, et on a

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de sorte que le rayon de convergence est infini d'après le deuxième critère du théorème 3.7. Ainsi, d'après le théorème 3.10, les séries entières (4.11) et (4.13) ayant même centre 0 et rayon de convergence infini, leurs somme et différence ont un rayon de convergence infini et on a l'égalité de série entières

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}x^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!}x^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1+(-1)^n}{n!}x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{(2n)!}x^{2n}\\
\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}x^n - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!}x^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1-(-1)^n}{n!}x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{(2n+1)!}x^{2n+1}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Puisque les fonctions $\mathbb{R}\ni x\mapsto e^x$ et $\mathbb{R}\ni x\mapsto e^{-x}$ sont les fonctions sommes de (4.11) et (4.13), les membres gauches des égalités (4.14) tendent simplement vers les fonctions $\mathbb{R}\ni x\mapsto e^x+e^{-x}$ et $\mathbb{R}\ni x\mapsto e^x-e^{-x}$; ainsi, les fonctions cosh et sinh sont analytiques sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions sommes des séries entières de rayon de convergence infini

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

On finit ce chapitre avec les fonctions trigonométriques circulaires. Les fonctions cos et sin ont pour dérivées respectives $-\sin$ et cos, de sorte qu'on a $\cos' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$, $\cos^{(3)} = \sin$ et $\cos^{(4)} = \cos$ d'une part et $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin^{(3)} = -\cos$ et $\sin^{(4)} = \sin$ d'autre part. Ainsi, les dérivées de cos sont données par : pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\cos^{(4k)} = \cos$, $\cos^{(4k+1)} = -\sin$, $\cos^{(4k+2)} = -\cos$ et $\cos^{(4k+3)} = \sin$; et les dérivées de sin sont données par : pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\sin^{(4k)} = \sin$, $\sin^{(4k+1)} = \cos$, $\sin^{(4k+2)} = -\sin$ et $\sin^{(4k+3)} = -\cos$. Avec $\cos(0)=1$ et $\sin(0)=0$, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a donc

$$\cos^{(4k)}(0) = 1, \qquad \cos^{(4k+1)}(0) = 0, \qquad \cos^{(4k+2)} = -1, \qquad \cos^{(4k+3)}(0) = 0,$$

$$\sin^{(4k)}(0) = 0, \qquad \sin^{(4k+1)}(0) = 1, \qquad \sin^{(4k+2)}(0) = 0, \qquad \sin^{(4k+3)}(0) = -1.$$

Or, les deux relations $\cos^{2(2k)} = \cos^{(4k)} = 1 = (-1)^{2k}$ et $\cos^{2(k+1)}(0) = \cos^{(4k+2)}(0) = -1 = (-1)^{2k+1}$, se réécrivent en $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$ et de même, les deux relations $\sin^{(2(2k)+1)}(0) = \sin^{(4k+1)}(0) = 1 = (-1)^{2k}$ et $\sin^{(2(2k+1)+1)}(0) = \sin^{(4k+3)}(0) = -1 = (-1)^{2k+1}$ se réécrivent en $\sin^{(2k+1)} = (-1)^k$. En résumé, on a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k, \quad \cos^{(2k+1)}(0) = 0, \qquad \sin^{(2k)}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Ainsi, en notant p_n et q_n les polynômes de Taylor d'ordres n de cos et sin en 0, le polynôme q_0 est la fonction identiquement nulle, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$p_{2n}(x) = p_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \text{et} \qquad q_{2n+1}(x) = q_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Ce qui donne comme candidats pour les développements en séries entières de cos et sin en 0 :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{4.15}$$

On calcule les rayons de convergence des séries entières (4.15) : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{(-1)^k}{(2k)!} x_0^{2k} \right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} |x_0|^{2k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x_0^{2k+1} \right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} |x_0|^{2k+1}. \tag{4.16}$$

Or, en sommant les deux sommes partielles de (4.16), on obtient la somme partielle d'indice $2n+1$ du développement en série entière de la fonction exponentielle en 0 évaluée en $|x_0|$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} |x_0|^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} |x_0|^{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!} |x_0|^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{|x_0|},$$

donc le sommes partielles (4.16) ont une limite finie quand $n \to \infty$, ce qui montre que les deux séries entières (4.15) convergent absolument en tout $x_0 \in \mathbb{R}$, donc elles ont un rayon de convergence infini. Il reste à montrer que les restes de Taylor-Lagrange $R_n^{\cos}$ et $R_n^{\sin}$ d'ordre n des fonctions cos et sin en 0 convergent simplement vers la fonction identiquement nulle. Or ils sont donnés par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $c, s \in \mathbb{R}$ tels que

$$R_n^{\cos}(x) = \frac{\cos^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad \text{et} \qquad R_n^{\sin}(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Les valeurs absolues de cos et sin étant majorées par 1 et leurs dérivées étant $\pm \sin$ et $\pm \cos$, on a

$$\left|R_n^{\cos}(x)\right|, \left|R_n^{\sin}(x)\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

et on a vu que la suite de terme général $|x|^n / n!$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Ainsi, $R_n^{\cos}$ et $R_n^{\sin}$ tendent simplement vers la fonction identiquement nulle et donc cos et sin sont analytiques sur $\mathbb{R}$, en tant que fonctions sommes des séries entières (4.15), de rayon de convergence infini.